Interpolation de Lagrange

Soit $n \geq 1$ et un $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, où les a_i sont deux à deux distincts. On définit, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ le polynôme

$$L_i = \frac{\prod_{j \neq i}(X - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}.$$

On vient donc de définir $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ une famille de $n+1$ polynômes associés au $(n+1)$-uplet $(a_0, \ldots, a_n)$.

1. Afin de bien comprendre la définition précédente, prenons par exemple
$$n = 3, \quad a_0 = -1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 2.$$
Expliciter la famille (L_0, L_1, L_2, L_3) associée à $(-1, 0, 1, 2)$.
2. Retour au cas général. Soient $i, k \in [\![0, n]\!]$. Que vaut $L_i(a_k)$? On pourra utiliser le symbole de Kronecker.
3. On se propose de démontrer que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ directement à partir de sa définition. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Par analyse-synthèse, prouver que P s'écrit comme combinaison linéaire des L_i et que cette décomposition est unique.
Pourquoi les coordonnées de P sur la base $(L_0, \ldots, L_n)$ sont-elles particulièrement faciles à calculer ?
4. Application. Soit $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$. En utilisant la base $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$, justifier qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que
$$\forall i \in [\![0, n]\!] \quad P(a_i) = b_i.$$
Ce qui précède garantit notamment l'existence et l'unicité d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que
$$P(-1) = 3 \quad P(0) = 1 \quad P(1) = 2 \quad \text{ et } P(2) = -1.$$
Le calculer. Chercher la définition du mot *interpolation*. Pourquoi qualifie-t-on les polynômes L_i de polynômes *interpolateurs* ?

Corrigé

Soit $n \geq 1$ et un $(n+1)$-uplet $(a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, où les a_i sont deux à deux distincts. On définit, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$ le polynôme

$$L_i = \frac{\prod_{j \neq i}(X - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}.$$

On vient donc de définir $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ une famille de $n+1$ polynômes associés au $(n+1)$-uplet $(a_0, \ldots, a_n)$.

1. Par définition, on a par exemple
$$L_1 = \frac{(X - a_0)(X - a_2)(X - a_3)}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} = \frac{1}{2}(X+1)(X-1)(X-2).$$
On calcule de même
$$L_0 = -\frac{1}{6}X(X-1)(X-2), \quad L_2 = -\frac{1}{2}(X+1)X(X-2), \quad L_3 = \frac{1}{6}(X+1)X(X-1).$$
2. Soient $i, k \in [\![0, n]\!]$. On a
$$L_i(a_k) = \frac{\prod_{j \neq i}(a_k - a_j)}{\prod_{j \neq i}(a_i - a_j)}.$$
Si $k \neq i$, alors l'un des facteurs au dénominateur vaut 0 et $L_i(a_k) = 0$. Si, en revanche, $L_k(a_k) = 1$. Ce qui précède se résume en écrivant
$$\boxed{L_i(a_k) = \delta_{i,k}.}$$
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
Analyse. Supposons que P se décompose sur la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$: il existe un $(n+1)$-uplet $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ de scalaires tel que $P = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i$. Évaluons en a_k : on obtient
$$\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \lambda_i \underbrace{L_i(a_k)}_{=0} + \lambda_k \underbrace{L_k(a_k)}_{=1} = P(a_k), \quad \text{donc } \lambda_k = P(a_k).$$
Ceci démontre l'unicité des coordonnées.
Synthèse. Posons $Q = \sum_{i=0}^{n} P(a_i) L_i$. Ce polynôme appartient à $\mathbb{R}_n[X]$, puisque les L_i sont des polynômes de cet espace

vectoriel. Démontrons que $P = Q$. Pour cela, on va remarquer que P et Q coïncident en les a_i : $\forall i \in [\![0, n]\!]$ $Q(a_i) = P(a_i)$ (il suffit d'évaluer pour le voir). Ainsi, le polynôme $P - Q$ possède $n + 1$ racines non nulles. Étant de degré inférieur à n, il est fatalement nul : $P = Q$.
Conclusion. Tout polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des L_i : $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est bien une base. Il est très simple d'obtenir la coordonnée sur L_i : c'est $P(a_i)$.

4. Supposons qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![0, n]\!] \quad P(a_i) = b_i.$$

Ce polynôme P s'écrit sur la base $(L_0, \ldots, L_n)$ et d'après la question précédente, ses coordonnées sur cette base sont $(b_0, b_1, \ldots, b_n)$. Le polynôme P est donc nécessairement : $\sum\limits_{i=0}^{n} b_i L_i$. Réciproquement, pour $0 \leq k \leq n$, on a

$$P(a_k) = \sum_{i=0}^{n} b_i L_i(a_k) = b_k \cdot 1 + 0 = b_k.$$

On peut donc conclure qu'il existe un unique polynôme qui convient : $\sum\limits_{i=0}^{n} b_i L_i$.

Le polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ satisfaisant les contraintes de l'énoncé est

$$P = 3L_0 + L_1 + 2L_2 - L_3$$

Les polynômes (L_0, L_1, L_2, L_3) définis à partir du quadruplet $(-1, 0, 1, 2)$ ont été calculés en question 1. Il n'y a plus qu'à développer pour trouver

$$P = -\frac{1}{6}\left(7X^3 - 9X^2 - 4X - 6\right)$$

Interpoler, c'est proposer une fonction qui passe par un ensemble de points donnés. Ici, on a donné l'unique polynôme de degré inférieur à 3 passant par les quatre points $(-1, 3)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$ et $(2, -1)$.