Décomposition dans la base des polynômes de Legendre

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On notera $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note
$$U_n = (X^2-1)^n \quad \text{et} \quad L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}.$$
Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre*.

Dans tout ce problème enfin, n désignera un entier naturel.

Partie A. Une base de polynômes scindés. (CCP PC 2018)

1. Déterminer L_0 et L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}\left(3X^2-1\right)$.
2. (a) Quel est le degré de U_n ? Son coefficient dominant ?
   Calculer $U_n^{(2n)}$. Que vaut $U_n^{(k)}$ lorsque $k > 2n$?
   (b) Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.
3. Montrer que la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. (a) Énoncer le théorème de Rolle.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1,1[$ et un réel λ que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :
   $$U_n' = \lambda(X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$
   (c) Dans cette question seulement, $n \geq 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que
   $$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$
   Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \ldots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que
   $$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$
   (d) En déduire que si n est non nul, L_n admet n racines simples, toutes dans l'intervalle $]-1,1[$.

Partie B. Évaluation de L_n en 1 et en -1.

1. Pour un entier $k \in [\![0, n]\!]$, exprimer le polynôme $((X+1)^n)^{(k)}$ à l'aide de factorielles.
2. À l'aide de la formule de Leibniz, démontrer :
   $$L_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X+1)^{n-k}(X-1)^k.$$
3. Calculer $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.

Partie C. Calcul des nombres $\langle L_n, L_m\rangle$.

Dans cette partie, pour deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, on notera $\langle P, Q\rangle$ l'intégrale
$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$
Dans cette partie, m est tout comme n un entier naturel.

1. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note
   $$\mathcal{P}(k) : « \langle U_n^{(n)}, U_m^{(m)}\rangle = (-1)^k \langle U_n^{(n-k)}, U_m^{(m+k)}\rangle ».$$

(a) (*) En supposant n non nul, à l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ $\mathcal{P}(k) \Longrightarrow \mathcal{P}(k+1)$.

(b) Justifier l'égalité

$$\langle L_n, L_m \rangle = \frac{(-1)^n}{2^{n+m} n! m!} \langle U_n, U_m^{(m+n)} \rangle.$$

2. À l'aide de ce qui précède, démontrer que

$$n \neq m \Longrightarrow \langle L_n, L_m \rangle = 0.$$

3. (a) Toujours à l'aide de la question 1 (b), démontrer que

$$\langle L_n, L_n \rangle = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \mathrm{d}t.$$

(b) Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $J_k = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^k \mathrm{d}t$.
Intégrer J_k par parties et obtenir une relation entre J_k et J_{k-1} lorsque $k \geq 1$.

(c) En déduire une expression de J_n, puis que

$$\langle L_n, L_n \rangle = \frac{2}{2n+1}.$$

Partie D. Un mode de calcul des coordonnées.

Pour un entier $i$de $[\![0, n]\!]$, on pose

$$\varphi_i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \langle L_i, P \rangle \end{array} \right. .$$

1. Démonter que pour un i donné, φ_i est linéaire.
2. Démontrer

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad P = \sum_{i=0}^{n} \tfrac{2i+1}{2} \varphi_i(P) L_i.}$$

Indication : On pourra écrire la décomposition théorique de P sur la base des L_k et, pour i fixé, calculer $\varphi_i(P)$.