Décomposition dans la base des polynômes de Legendre

On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels. Pour n entier naturel, $\mathbb{R}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On précise que l'on pourra confondre polynôme et fonction polynomiale associée.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On notera $P^{(n)}$ sa dérivée n-ième.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note

$$U_n = (X^2-1)^n \quad \text{et} \quad L_n = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}.$$

Les polynômes L_n sont appelés *polynômes de Legendre.*

Dans tout ce problème enfin, n désignera un entier naturel.

Partie A. Une base de polynômes scindés. (CCP PC 2018)

1. Déterminer L_0 et L_1 et vérifier que $L_2 = \dfrac{1}{2}\left(3X^2-1\right)$.

2. (a) Quel est le degré de U_n ? Son coefficient dominant ?
   Calculer $U_n^{(2n)}$. Que vaut $U_n^{(k)}$ lorsque $k > 2n$?
   (b) Justifier que L_n est de degré n et préciser la valeur de a_n.
3. Montrer que la famille $(L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. (a) Énoncer le théorème de Rolle.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les racines de U_n, en précisant leur ordre de multiplicité, puis justifier qu'il existe un réel $\alpha \in]-1,1[$ et un réel λ que l'on ne cherchera pas à déterminer, tels que :

   $$U_n' = \lambda (X-1)^{n-1}(X+1)^{n-1}(X-\alpha).$$

   (c) Dans cette question seulement, $n \geq 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que

   $$U_n^{(k)} = \mu (X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$

   Justifier qu'il existe des réels $\beta_1, \dots, \beta_{k+1}$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel ν tels que

   $$U_n^{(k+1)} = \nu (X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$

   (d) En déduire que si n est non nul, L_n admet n racines simples, toutes dans l'intervalle $]-1,1[$.

Partie B. Évaluation de L_n en 1 et en -1.

1. Pour un entier $k \in [\![0, n]\!]$, exprimer le polynôme $\left((X+1)^n\right)^{(k)}$ à l'aide de factorielles.
2. À l'aide de la formule de Leibniz, démontrer :

   $$L_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 (X+1)^{n-k}(X-1)^k.$$

3. Calculer $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.

Partie C. Calcul des nombres $\langle L_n, L_m \rangle$.

Dans cette partie, pour deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$, on notera $\langle P, Q \rangle$ l'intégrale

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

Dans cette partie, m est tout comme n un entier naturel.

1. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note

   $$\mathcal{P}(k) : « \langle U_n^{(n)}, U_m^{(m)} \rangle = (-1)^k \langle U_n^{(n-k)}, U_m^{(m+k)} \rangle ».$$

(a) (*) En supposant n non nul, à l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ $\mathcal{P}(k) \implies \mathcal{P}(k+1)$.

(b) Justifier l'égalité

$$\langle L_n, L_m \rangle = \frac{(-1)^n}{2^{n+m} n! m!} \langle U_n, U_m^{(m+n)} \rangle.$$

2. À l'aide de ce qui précède, démontrer que

$$n \neq m \Longrightarrow \langle L_n, L_m \rangle = 0.$$

3. (a) Toujours à l'aide de la question 1 (b), démontrer que

$$\langle L_n, L_n \rangle = \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \mathrm{d}t.$$

(b) Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $J_k = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^k \mathrm{d}t$.
Intégrer J_k par parties et obtenir une relation entre J_k et J_{k-1} lorsque $k \geq 1$.

(c) En déduire une expression de J_n, puis que

$$\langle L_n, L_n \rangle = \frac{2}{2n+1}.$$

Partie D. Un mode de calcul des coordonnées.

Pour un entier $i$de $[\![0, n]\!]$, on pose

$$\varphi_i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \langle L_i, P \rangle \end{array} \right. .$$

1. Démonter que pour un i donné, φ_i est linéaire.
2. Démontrer

$$\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \quad P = \sum_{i=0}^{n} \tfrac{2i+1}{2} \varphi_i(P) L_i.}$$

Indication : On pourra écrire la décomposition théorique de P sur la base des L_k et, pour i fixé, calculer $\varphi_i(P)$.

Corrigé

Partie A. Une base de polynômes scindés. (CCP PC 2018)

1. $L_0 = 1$.
$L_1 = \frac{1}{2}(X^2-1)' = X$.

2. (a) U_n est un polynôme de degré $2n$ de coefficient dominant 1. Donc $U_n^{(n)}$ est un polynôme de degré n est son coefficient dominant est $\frac{2n!}{n!}$.

$$U_n^{(2n)} = (2n)! \qquad \text{et} \qquad \forall k > 2n,\ U_n^k = 0.$$

(b) Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\deg(U_n^{(k)}) = 2n - k$. En effet, $\deg(U_n) = 2n$, et par itération, si $\deg(U_n^{(k)}) = 2n - k$ alors, comme $2n - k > 0$, $\deg(U_n^{(k+1)}) = \deg(U_n^{(k)}) - 1 = 2n - (k+1)$.

Ainsi L_n est un polynôme de degré n, et son coefficient dominant est $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$.

Or $\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \binom{2n}{n}$. Donc, le coefficient dominant de L_n est : $\frac{\binom{2n}{n}}{2^n}$.

3. La famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est échelonnée en degré et dans $\mathbb{R}_n[X]$, c'est donc un famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, $\mathrm{Card}(L_0, \ldots, L_n) = n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ donc c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

4. (a) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a < b$. Soit f un fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$U_n = (X^2-1)^n = \big((X-1)(X+1)\big)^n = (X-1)^n (X+1)^n.$$

On a donc la forme décomposée de U_n, donc U_n à deux racines, (-1) et 1, toutes deux de multiplicité n.
Donc (-1) et 1 sont deux racines de multiplicité $(n-1)$ de U_n'.En outre, la fonction polynômiale associée à U_n est continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $]-1, 1[$, et $U_n(-1) = U_n(1) = 0$, donc il existe $\alpha \in]-1, 1[$ tel que $U_n'(\alpha) = 0$.
On a donc 2 racine de multiplicité $(n-1)$ et une racine (a priori simple). En comptant les multiplicités on obtient donc $2(n-1) + 1 = 2n - 1 = \deg(U_n')$ racines. Donc on a la forme factorisé et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$U_n' = \lambda (X-1)^{n-1} (X+1)^{n-1} (X - \alpha).$$

(Certes, on ne nous demande pas que calculer λ, mais en réalité ce n'est pas compliqué, λ est le coefficient dominant de U_n', c'est donc $2n$.)

(c) Soit $n \geq 2$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose qu'il existe des réels $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ deux à deux distincts dans $]-1,1[$ et un réel μ tels que

$$U_n^{(k)} = \mu(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-\alpha_1)\cdots(X-\alpha_k).$$

Tout d'abord, comme (-1) et 1 sont des racines de multiplicité n et U_n, ce sont des racines de multiplicité $n-(k+1)$ de U_n^{k+1}.

Soit $l \in [\![1, k-1]\!]$, la fonction $U_n^{(k)}$ est continue sur $[\alpha_l, \alpha_{l+1}]$ et dérivable sur $]\alpha_l, \alpha_{l+1}[$. En outre, $U_n^{(k)}(\alpha_l) = U_n^{(k)}(\alpha_{l+1})$, donc il existe $\beta_{l+1} \in]\alpha_l, \alpha_{l+1}[$ tel que $U_n^{(k+1)}(\beta_l) = 0$.

De même, la fonction $U_n^{(k)}$ est continue sur $[-1, \alpha_1]$ et dérivable sur $]-1, \alpha_1[$. En outre, $U_n^{(k)}(-1) = U_n^{(k)}(\alpha_1)$, donc il existe $\beta_1 \in]-1, \alpha_1[$ tel que $U_n^{(k+1)}(\beta_1) = 0$.

on peut faire le même raisonnement sur $[\alpha_k, 1]$ pour montrer qu'il existe $\beta_{k+1} \in]\alpha_k, 1[$ tel que $U_n^{(k+1)}(\beta_{k+1}) = 0$.

Enfin, on a $\beta_1 < \alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < ... < \beta_k < \alpha_k < \beta_{k+1}$ donc les réels β_1,...,β_{k+1} sont distincts deux à deux.
Ainsi, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$U_n^{(k+1)} = P(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$

Or, $\deg((X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1})) = 2(n-k-1)+k+1 = 2n-k-1 = \deg(U_n^{(k+1)})$, donc $\deg(P) = 0$.
Donc il existe $\nu \in \mathbb{R}$ tel que :

$$U_n^{(k+1)} = \nu(X-1)^{n-k-1}(X+1)^{n-k-1}(X-\beta_1)\cdots(X-\beta_{k+1}).$$

(d) La question a) (initialisation) et la question b) (hérédité) permettent de démontrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ il existe $a_1, \cdots a_k$ k réels distincts dans $]-1,1[$ et b un réel tel que

$$U_n^{(k)} = b(X-1)^{n-k}(X+1)^{n-k}(X-a_1)\cdots(X-a_k).$$

Ainsi, il existe $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ dans $]-1,1[$ et μ dans $\mathbb{R}$ tels que :

$$L_n = \mu(X-\gamma_1)\cdots(X-\gamma_n).$$

On a donc la décomposition en polynômes premiers de L_n. Donc $\gamma_1, \cdots, \gamma_n$ sont des racines simples de L_n. Elles sont au nombre de n. Donc L_n a n racines simples, toutes dans $]-1,1[$.

Partie B. Évaluation de L_n en 1 et en -1.

1. $\forall k \in [\![0, n]\!] \qquad ((X+1)^n)^{(k)} = \dfrac{n!}{(n-k)!}(X+1)^{n-k}.$
2. Les fonctions $x \mapsto (x-1)^n$ et $x \mapsto (x+1)^n$ sont polyomiales donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En confondant polynômes et fonctions polynomiales, la formule de Leibniz amène

$$\begin{aligned} L_n = \frac{1}{2^n n!}\big((X+1)^n(X-1)^n\big)^n &= \frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}((X+1)^n)^{(k)}((X-1)^n)^{(n-k)} \\ &= \frac{1}{2^n \cancel{n!}}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{(n-k)!}(X+1)^{n-k}\frac{\cancel{n!}}{k!}(X-1)^k \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2(X+1)^{n-k}(X-1)^k. \end{aligned}$$

3. $L_n(1) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{0}^2(1+1)^n = 1 \qquad$ et $\qquad L_n(-1) = (-1)^n.$

Partie C. Calcul des nombres $\langle L_n, L_m\rangle$.

1. (a) (*) Soit n non nul, et $k \in [\![0, n-1]\!]$. Supposons $\mathcal{P}(k)$. Alors :

$$\langle U_n^{(n)}, U_m^{(m)}\rangle = \langle U_n^{(n-k)}, U_m^{(m+k)}\rangle$$

Par intégration par parties, en dérivant $U_m^{(m+k)}$ et en intégrant $U_n^{(n-k)}$ on obtient :

$$\langle U_n^{(n)}, U_m^{(m)}\rangle = (-1)^k\left[U_m^{(m+k)}U_n^{(n-k-1)}\right]_{-1}^{1} - (-1)^k\int_{-1}^{1}U_n^{(n-k-1)}(t)U_m^{(m+k+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Or, si $k \in [\![0, n-1]\!]$, $n-k-1 \in [\![0, n-1]\!]$, donc $U_n^{(n-k-1)}(-1) = 0 = U_n^{(n-k-1)}(1)$, donc :

$$\langle U_n^{(n)}, U_m^{(m)} \rangle = (-1)^{k+1} \int_{-1}^{1} U_n^{(n-k-1)}(t) U_m^{(m+k+1)}(t) \mathrm{d}t.$$

(b) On a $\mathcal{P}(0)$ car $\langle L_n, L_m \rangle = \frac{1}{2^{n+m} n! m!} \langle U_n^{(n)}, U_m^{(m)} \rangle$.
Donc par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. D'où le résultat demandé.

2. Supposons $n < m$, alors :

$$\langle L_n, L_m \rangle = \frac{(-1)^n}{2^{n+m} n! m!} \langle U_n, U_m^{(n+m)} \rangle.$$

Or, comme $n < m$, on a $n + m > 2m$ et donc $U_m^{(n+m)} = 0$. Ainsi, $\langle U_n, U_m^{(n+m)} \rangle = \int_{-1}^{1} 0 \mathrm{d}t = 0$.
Donc :

$$\langle L_n, L_m \rangle = 0.$$

Si $n > m$, alors en utilisant une symétrie triviale, $\langle L_n, L_m \rangle = \langle L_m, L_n \rangle = 0$

(a)

$$\langle L_n, L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \langle U_n, U_n^{2n} \rangle = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \langle U_n, (2n)! \rangle = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} (-1)^n (t^2-1)^n \mathrm{d}t = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^n \mathrm{d}t.$$

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$, on veut calculer : $J_k = \int_{-1}^{1} (1-t^2)^k \mathrm{d}t$.
Par intégration par partie, $u(t) = (1-t^2)$, $u'(t) = -2tk(1-t^2)^{k-1}$, $v'(t) = 1$, $v(t) = t$. Par intégration par partie, on trouve :

$$\begin{aligned} J_k &= \left[(1-t^2)^k\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1} 2kt^2(1-t^2)^{k-1} \mathrm{d}t \\ &= 0 + 2k \int_{-1}^{1} (t^2 - 1 + 1)(1-t^2)^{k-1} \mathrm{d}t \\ &= 2k \int_{-1}^{1} (t^2-1)(1-t^2)^{k-1} \mathrm{d}t + 2k \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{k-1} \mathrm{d}t \\ &= -2kJ_k + 2kJ_{k-1}. \end{aligned}$$

Donc : $J_k = \frac{2k}{2k+1} J_{k-1}$.

(c) Ainsi :

$$J_n = \frac{\prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_1^n 2k+1} J_0 = \frac{2^n \prod_1^n k \prod_1^n 2k}{\prod_1^n k} J_0 = \frac{2^n n! 2^n n!}{(2n+1)!} J_0$$

Or $J_0 = 2$.
Donc :

$$J_n = \frac{2}{2n+1} \frac{\left(2^n (n!)\right)^2}{(2n)!} \qquad \text{puis} \qquad \langle L_n, L_n \rangle = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} (2n!) J_n = \frac{2}{2n+1}.$$

Partie D. Un mode de calcul des coordonnées.

1. Soit i dans $[\![0, n]\!]$. Soit P et Q deux éléments de $\mathbb{R}_n[X]$, λ dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\varphi_i(\lambda P+Q) = \langle L_i, \lambda P+Q \rangle = \int_{-1}^{1} L_i(t) \left(\lambda P(t) + Q(t)\right) \mathrm{d}t = \lambda \int_{-1}^{1} L_i(t)P(t)\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1} L_i(t)Q(t)\mathrm{d}t = \lambda \langle L_i, P \rangle + \langle L_i, Q \rangle = \lambda \varphi_i(P) + \varphi_i(Q)$$

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.
Il existe $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ dans $\mathbb{R}^n$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k L_k$.

Soit $i \in [\![0, n]\!]$, alors :

$$\varphi_i(P) = \langle L_i, P \rangle = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k \langle L_i, L_k \rangle = \lambda_i \frac{2}{2i+1}$$

D'où :

$$\lambda_i = \frac{2i+1}{2} \varphi_i(P).$$