Lycée Condorcet
PCSI

Exercice 1. Calculs divers

1. Soient $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (1, 3, 2)$ et $u_3 = (1, 1, 1)$. Démontrer qu'il s'agit d'une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (3, 2, 1)$ et $v_3 = (1, 1, 1)$.
   (a) Démontrer que (v_1, v_2, v_3) est liée.
   (b) Quel est le rang de (v_1, v_2, v_3) ?
3. Soit a un réel. Démontrer que la famille
$$(1, X - a, (X - a)^2, \dots, (X - a)^n)$$
   est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
4. La partie suivante est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$:
$$F = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y + z - t = 0 \ \text{ et } \ 3x + 2y - z - t = 0\right\}.$$
   (a) Donner une base de F et en déduire sa dimension.
   (b) Notons (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit $G = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$. En utilisant un argument de dimension, prouver que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$.

Problème 1 : Sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à coefficients réels de taille 3×3. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E. Enfin on note F l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}$ dont la sommes des termes de chaque ligne et chaque colonne est nulle. Et on note E_1, E_2 et E_3 les matrices suivantes :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{A}$ sont des sous-espaces supplémentaires dans E (Attention ! Il faut montrer d'abord montrer que ce sont des sev !).
2. (a) Soit M une matrice de $\mathcal{S}$. Justifier que si la somme sur chaque ligne de M vaut 0 alors la somme sur chaque colonne également. En déduire, si $M \in \mathcal{S}$:
$$M \in F \iff BM = 0$$
   (b) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
   (c) Montrer que si $(M, N) \in F^2$ et $MN = NM$ alors $MN \in F$.
3. (a) Montrer que la famille (E_1, E_2, E_3) est libre.
   (b) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$: montrer que $M \in F$ se traduit par un système sur les coefficients (a, b, c, d, e, f).
   (c) Résoudre le système en déduire une base de F.
4. On rappelle que $Gl_3(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices inversibles de E.
   (a) L'ensemble $Gl_3(\mathbb{R})$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?
   (b) Démontrer que $GL_3(\mathbb{R}) \cap F = \emptyset$
5. Soit $M \in E$, on définit la trace de M comme le réel :
$$Tr(M) = [M]_{1,1} + [M]_{2,2} + [M]_{3,3}$$
   On note P l'ensemble :
$$P = \{M \in F, Tr(M) = 0\}$$

(a) Montrer que P est un plan vectoriel (Sous-espace vectoriel de dimension 2).
Montrer que $\mathcal{B} = (E_1 - E_3, E_2 - E_3)$ est une base de F.

(b) Soit $D = \text{Vect}(2E_1 - E_2 + 2E_3)$, montrer que $D \oplus P = F$.

(c) Soit $M \in P$ de coordonnées (x, y) dans la base $\mathcal{B}$. Calculer M^2 et M^3, puis, montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $M^{2n} \in D$ et $M^{2n+1} \in P$.