Commutant d'une matrice

Soit une matrice M de $M_3(\mathbb{R})$. On définit le **commutant** de M comme l'ensemble des matrices qui commutent avec M. Cet ensemble sera noté $\mathcal{C}_M$; on a donc

$$\mathcal{C}_M = \{A \in M_3(\mathbb{R}) \quad AM = MA\}.$$

On se propose dans ce problème d'établir quelques propriétés générales des ensembles $\mathcal{C}_M$ et d'expliciter les commutants de certaines matrices particulières.
On notera $\mathcal{P}_M$ l'ensemble des "polynômes en M", c'est à dire

$$\mathcal{P}_M = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k M^k \quad n \in \mathbb{N}, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Par exemple, $2M^6 - M^3 + 3M + I_3 \in \mathcal{P}_M$.

Partie A. Propriétés générales.

Dans toute cette partie, M est (sauf précision) une matrice quelconque fixée dans $M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathcal{C}_M$ et $\mathcal{P}_M$ sont des sous-espaces vectoriels de$M_3(\mathbb{R})$.
2. Démontrer que $\mathcal{C}_M$ est stable par produit. En déduire que si A est dans $\mathcal{C}_M$, alors A^n aussi pour tout n entier naturel.
3. Démontrer que $\mathcal{P}_M \subset \mathcal{C}_M$.
   Indication : on pourra se passer de calculs en utilisant les questions précédentes.
4. Démontrer que $\mathcal{C}_M$ est stable par inverse, c'est à dire que si A est une matrice inversible de $\mathcal{C}_M$, alors $A^{-1} \in \mathcal{C}_M$.
5. Supposons ici que M symétrique. Démontrer qu'alors $\mathcal{C}_M$ est stable par transposition. Est-ce vrai si M est antisymétrique ?

Partie B. Commutant de certaines matrices diagonales.

Soient $D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $D_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Que valent les ensembles $\mathcal{C}_{0_{3,3}}$ et $\mathcal{C}_{I_3}$? Quelle est la dimension de ces espaces. Comparer ces espaces avec $\mathcal{P}_{0_{3,3}}$ et $\mathcal{P}_{I_3}$.
2. Démontrer que $\mathcal{C}_{D_1}$ est l'ensemble des matrices diagonales.
   Quelle est sa dimension ?
3. Trouver une base de $\mathcal{C}_{D_2}$. Quelle est sa dimension.
4. Même question pour $\mathcal{C}_{D_3}$.

Partie C. Commutant d'une certaine matrice diagonalisable.

Soient $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Montrer que PMP^{-1} est une matrice diagonale que l'on notera D.
3. Démontrer que

   $$\forall A \in M_3(\mathbb{R}) \quad A \in \mathcal{C}_M \iff PAP^{-1} \in \mathcal{C}_D.$$

   Expliciter $\mathcal{C}_M$. *Combien de degrés de liberté ?*

Partie D. Commutant d'une certaine matrice nilpotente.
On note dans cette partie

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que la famille (I_3, N, N^2) est une base de $\mathcal{P}_N$.
2. Démontrer que $\mathcal{C}_N = \mathcal{P}_N$. Le commutant de N est-il stable par transposition ?
3. Expliciter $GL_3(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}_N$.

Corrigé

Partie A. Propriétés générales.

1. - Notons $O = 0_{3,3}$ la matrice nulle de $M_3(\mathbb{R})$. On a $OM = MO$, ce qui montre que $O \in \mathcal{C}_M$. Ainsi $\mathcal{C}_M$ est non vide.
   Soient $A, B \in \mathcal{C}_M$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   $$(\lambda A + \mu B)M = \lambda AM + \mu BM = \lambda MA + \mu MB = M(\lambda A + \mu B).$$
   On a bien prouvé que $\mathcal{C}_M$ était un sev de $M_3(\mathbb{R})$.
   - On a $O = 0I_3$ ainsi $O \in \mathcal{P}_M$, donc $\mathcal{P}_M$ est non vide.
   Soient A et B deux matrices de $\mathcal{P}_M$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Quitte à rajouter des zéros il existe $(a_0, \cdots a_m) \in \mathbb{R}^m$ et $(b_0, \cdots b_m)\mathbb{R}^m$ tels que
   $$A = \sum_{k=0}^{n} a_k M^k \text{ et } B = \sum_{k=0}^{n} b_k M^k$$
   On a donc :
   $$\lambda A + B = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + b_k) M^k$$
   Ainsi $\lambda A + B \in \mathcal{P}_M$.
   L'ensemble $\mathcal{P}_M$ est bien un sev de $M_3(\mathbb{R})$.
2. Soient A et B dans $\mathcal{C}_M$. On a
   $$(AB)M = A(BM) = A(MB) = (AM)B = (MA)B = M(AB).$$
   On a bien que AB commute avec M : $AB \in \mathcal{C}_M$.
   On sait que $M \in \mathcal{C}_M$. En utilisant la stabilité par produit, on prouve que $M^2 \in \mathcal{C}_M$, puis $M^3 \in \mathcal{C}_M$... et par une récurrence simple, $\forall k \geq 1$ $M^k \in \mathcal{C}_M$. Le cas $k = 0$ est à part : on sait déjà que $M^0 (= I_3)$ est dans $\mathcal{C}_M$.
3. Soit $A \in \mathcal{P}_M$. C'est une combinaison linéaire de puissances de M, donc une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{C}_M$. On a prouvé que $\mathcal{C}_M$ est stable par combinaisons linéaires. On en déduit que $A \in \mathcal{C}_M$.
4. Soit A une matrice inversible de $\mathcal{C}_M$ (on sait que cela existe : il y a au moins l'identité !) En multipliant l'égalité $AM = MA$ à gauche et à droite par A^{-1}, on obtient
   $$A^{-1}M = MA^{-1},$$
   ce qui montre bien que $A^{-1} \in \mathcal{C}_M$.
5. On suppose que M est symétrique, c'est-à-dire $M^T = M$. Soit $A \in \mathcal{C}_M$. On a
   $$A^T M = A^T M^T = (MA)^T = (AM)^T = M^T A^T = MA^T.$$
   Ceci prouve bien que $A^T \in \mathcal{C}_M$.
   Ceci est toujours vrai si M est antisymétrique, c'est-à-dire $M^T = -M$: on a
   $$A^T M = A^T(-M^T) = -(MA)^T = -(AM)^T = (-M^T)A^T = MA^T.$$

Partie B. Commutant de certaines matrices diagonales.

On connait l'effet d'un produit à droite ou à gauche par une matrice diagonale !

1. Toutes les matrices commutent avec la matrice nulle et avec l'identité. Ainsi, $\mathcal{C}_{0_{3,3}} = \mathcal{C}_{I_3} = M_3(\mathbb{R})$.
   Il est clair que $\mathcal{C}_{I_3}$ est différent de $\mathcal{P}_{I_3}$: les polynômes en I_3 sont multiples de I_3 (s'en convaincre) ce qui est loin d'être le cas de toutes les matrices de $\mathcal{C}_{I_3} = M_3(\mathbb{R})$.

   Dans toute la suite, on utilisera pour les calculs une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.
2. Soit A une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont donnés ci-dessus.
   $$AD_1 = D_1 A \iff \begin{pmatrix} a & 2b & 3c \\ d & 2e & 3f \\ g & 2h & 3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ 3g & 3h & 3i \end{pmatrix}$$
   $$\iff b = c = d = f = g = h = 0.$$
   On en déduit que
   $$\mathcal{C}_{D_1} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, a, e, i \in \mathbb{R} \right\}.$$
   Cet ensemble est engendré par la famille $(E_{11}, E_{22}, E_{3,3})$. Cette famille est clairement libre. Ainsi $\dim(\mathcal{C}_{D_1}) = 3$.

3. On travaille toujours avec une matrice A quelconque

$$\begin{aligned} AD_2 = D_2A &\iff \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &\iff b = c = d = g = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathcal{C}_{D_2} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & f \\ 0 & h & i \end{pmatrix}, a, e, f, h, i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cet ensemble est engendré par ma famille $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{2,3}, E_;3, 2)$. Cette famille étant libre $\dim(\mathcal{C}_{D_2}) = 5$.

4. On travaille toujours avec une matrice A quelconque

$$\begin{aligned} AD_3 = D_3A &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & h & i \end{pmatrix} \\ &\iff c = f = g = h = 0. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathcal{C}_{D_3} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ d & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}, a, b, d, e, i \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cet ensemble est engendré par ma famille $(E_{1,1}, E_{2,2}, E_{3,3}, E_{2,1}, E_;1, 2)$. Cette famille étant libre $\dim(\mathcal{C}_{D_2}) = 5$.

Partie C. Commutant d'une certaine matrice diagonalisable.

1. En appliquant la méthode issue du pivot de Gauss, on démontre que P est de rang 3 donc inversible, et que son inverse vaut

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Un calcul de produit amène

$$PMP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = D_1.$$

3. Soit $A \in M_3(\mathbb{R})$. Puisque $PMP^{-1} = D$, on a $M = P^{-1}DP$.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{C}_M \iff AM = MA &\iff A(P^{-1}DP) = (P^{-1}DP)A \\ &\iff PAP^{-1}D = DPAP^{-1} \\ &\iff PAP^{-1} \in \mathcal{C}_D. \end{aligned}$$

On a démontré que $\mathcal{C}_D = \mathcal{C}_{D_1}$ est l'ensemble des matrices diagonales. Ainsi

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{C}_M &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad PAP^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \\ &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad A = P^{-1} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} P \end{aligned}$$

Le produit précédent vaut $\begin{pmatrix} b & b-c & b-c \\ -a+b & b & -a+b \\ a-b & -b+c & a-b+c \end{pmatrix}$

On peut conclure

$$\mathcal{C}_M = \left\{ a \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

Partie D. Commutant d'une certaine matrice nilpotente.

1. Une matrice de la forme $\alpha I_3 + \beta N + \gamma N^2$ est clairement dans $\mathcal{P}_M$. Réciproquement, considérons une matrice A de la forme $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i N^i$, avec $n \in \mathbb{N}$ et les λ_i réels. Un calcul simple nous montre que $N^3 = 0_{3,3}$ et donc que $\forall i \geq 3 N^i = 0_{3,3}$. La matrice A s'écrit donc bien $A = \lambda_0 I_3 + \lambda_1 N + \lambda_2 N^2$.
2. Soit A une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ qui s'écrit comme auparavant. On a

$$\begin{aligned} AN = NA \iff & \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & d & e \\ 0 & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ & \iff a = e = i, \quad b = f, \quad d = g = h = 0. \end{aligned}$$

   Ainsi,

$$\mathcal{C}_N = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ aI_3 + bN + cN^2, a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

   En rapprochant ce résultat de la question précédente, on obtient bien $\mathcal{C}_N = \mathcal{P}_N$.
   La matrice N^T, triangulaire inférieure (non diagonale) donc elle n'est pas dans $\mathcal{C}_N$, alors que N oui : $\mathcal{C}_N$ n'est pas stable par transposition.
3. Les matrices de $\mathcal{C}_N$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. Elles sont échelonnées et leur rang vaut 3 si et seulement si $\alpha \neq 0$.