Lycée Condorcet | Avril 2024
PCSI

Probabilités sur un univers fini

Table des matières

1 Introduction

Le calcul des probabilités intervient dans la **modélisation** mathématiques de situations où l'on ne peut pas prédire avec certitude le résultat d'une expérience soumise aux fluctuations aléatoires que l'on ne maîtrise pas. Le but du Calcul des Probabilités est de quantifier le probable, c'est à dire d'associer à un événement A un nombre $P(A)$ qui mesure la "chance" que cet événement se réalise.

Par exemple, si l'expérience aléatoire est de jeter un dé équilibré à 6 faces et l'événement $A=$" Obtenir un 6", il est d'usage de dire que la probabilité de cet événement est $p(A) = \frac{1}{6}$. Nous interprétons cette phrase comme : si on répète un grand nombre de fois l'expérience, que l'on note $N(A)$ le nombre de fois où le six est sorti, on s'attend à ce que la fréquence $\dfrac{N(A)}{N}$ tende vers $\frac{1}{6}$ quand le nombre N tend vers l'infini.

Notons que cette interprétation suppose que l'on peut répéter un grand nombre de fois l'expérience aléatoire que l'on considère et que les différentes répétitions sont indépendantes (le résultat d'un expérience ne dépend pas du résultat de celles qui la précédent). On supposera aussi que pour tout événement A, $\dfrac{N(A)}{N}$ admet une limite finie quand N tend vers $+\infty$. La convergence de la fréquence empirique d'un événement est un phénomène physique appelé loi des grnads nombres.

Le lien entre expérience aléatoire et modélisation probabiliste est donné par ce diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\text{expérience} \arrow[r] \arrow[d] & \text{modèle probabiliste} \arrow[d] \\
\text{résultats expérimentaux} \arrow[r, leftrightarrow] & \text{résultats mathématiques}
\end{tikzcd}$$

Le lien entre les résultats expérimentaux et les résultats mathétiques est le travail d'une branche des mathématiques appelée **statistique**.

Une fois que le modèle mathématiques est établi, une simulation sur ordinateur est possible.

2 Observation d'une expérience aléatoire. Évènements

2.1 Définitions

Une expérience aléatoire est une expérience dont l'issue n'est pas prévisible.

Exemple 1

1. Lancer un dé à 6 faces et observer le résultat.
2. Lancer deux dés à 6 faces et observer le résultat.
3. Dans une course de chevaux avec sept chevaux, observer l'ordre d'arrivée des sept chevaux.
4. Jouer trois fois de suite à pile ou face, et observer les résultats.
5. Lancer un dé à 6 faces jusqu'à obtenir un 6.
6. Tirer un réel au hasard dans l'intervalle $[0, 1]$.
7. Mesurer la durée de vie d'une ampoule.

• On considérera des expériences où l'ensemble des résultats possibles est connu (bien que le résultat lui-même soit imprévisible).

Définition 1.

L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **l'univers des résultats observables**.

Dans ce chapitre, on notera en général Ω l'univers des résultats observables.

• **Remarque** Une même expérience aléatoire peut donner lieu à différentes modélisations, l'univers des résutats observables est alors, en général, différent (voir exemple des deux dés).

Exemple 2

Pour chacune des cinq expériences aléatoires précédentes, préciser l'univers des résultats observables.

• Une fois que l'on a précisé une expérience aléatoire, ainsi que son univers Ω des résultats observables, donner le résultat de l'expérience, c'est donner un élément de Ω. Donner un ensemble de résultats d'expérience, c'est donner une partie de Ω. Il sera pertinent de considérer certains de ces ensembles de résultats ; les parties de Ω associées sont appelées des **évènements**.

Exemple 3

Donner dans chaque exemple précédent un événement.

• **Remarque.** La réalisation de l'expérience fournit un résultat $\omega \in \Omega$. Si $A \subset \Omega$ est un évènement, dire que « l'évènement A a eu lieu », c'est dire que $\omega \in A$.

Définition 2.

Un **évènement élémentaire** est un évènement qui n'a qu'un seul élément (i.e. un seul résultat d'expérience correspond à cet évènement).

2.2 Opérations sur les évènements

On fixe une expérience aléatoire d'univers Ω des résultats observables. Supposons que $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ soient deux évènements.

• L'évènement « A et B » est la partie $A \cap B$.
Si $\omega \in \Omega$ est le résultat de l'expérience, dire que les évènements A et B se sont tous les deux produits, c'est dire que $\omega \in A$ et $\omega \in B$, c'est à dire $\omega \in A \cap B$.

• L'évènement « A ou B » est la partie $A \cup B$.
En effet, pour $\omega \in \Omega$, dire que $\big(\omega \in A \text{ ou } \omega \in B\big)$, c'est dire que $\omega \in A \cup B$.

• L'évènement complémentaire de A est $\overline{A}$.
Ainsi l'évènement A a lieu si et seulement si son complémentaire n'a pas lieu.

• **Remarque.** En combinant ces opérations, on peut considérer l'évènement $A \setminus B$: « A se produit mais pas B ».

Définition 3.

L'ensemble vide, $\varnothing$, est l'**évènement impossible**.
L'univers tout entier, Ω, est l'**évènement certain**.

Définition 4.

Supposons que A et B soient deux évènements. On dit que A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$.

2.3 Système complet d'évènements

On fixe une expérience aléatoire d'univers Ω des résultats observables.
Supposons que $(A_i)_{i \in I}$ soit une famille d'évènements (indexée par un certain ensemble I).

Définition 5.

On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un **système complet d'évènements** si les évènements de cette famille sont deux à deux incompatibles (condition 1 ci-dessous), et si leur réunion fait Ω tout entier (condition 2 ci-dessous). Cela s'écrit :

1. Pour tout $(i, j) \in I^2$ tel que $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \varnothing$.
2. $\displaystyle\bigcup_{i \in I} A_i = \Omega$.

Exemple 4

Donner dans chacun des exemples précédents un exemple de système complet d'événements.

• On dit que $(A_i)_{i \in I}$ est un système complet d'évènements fini si l'ensemble I a un nombre fini d'éléments.

3 Probabilité sur un univers fini

Dans la suite de ce chapitre, Ω désigne un ensemble **fini** (non vide). On décide que toutes les parties de Ω sont des évènements.

3.1 Définition

Définir une probabilité sur Ω consiste à donner pour tout événement A de Ω un nombre $P(A)$, il s'agit donc de définir une fonction sur $\mathcal{P}(A)$. Mais pour que ce nombre modélise la limite de la féquence de l'événement, il faut que cette fonction vérifie des conditions.

Tout d'abord une fréquence est un nombre appartenant à $[0,1]$. La limite de cette fréquence appartient elle aussi à cet intervalle donc $P(A) \in [0,1]$.
D'autre part, si A et B sont deux événements incompatibles alors on a l'égalité sur les fréquences :

$$\frac{N(A \cup B)}{N} = \frac{N(A)}{N} + \frac{N(B)}{N}$$

et donc par passage à la limite : $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
De plus la probabilité de l'événement certain doit être égale à 1 puique la fréquence de cet événement est égal à 1, ainsi ou doit avoir :

$$P(\Omega) = 1$$

Définition 6.

Soit P une application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$. On dit que P est une **probabilité** sur l'espace fini $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$ si les conditions suivantes sont vérifiées :

1. $P(\Omega) = 1$
2. Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ tels que $A \cap B = \varnothing$, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Dans ce cas, on dit que $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$ est un **espace probabilisé fini**.

Exemple 5

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer un dé à six faces. L'univers des résultats observables est $\Omega = [\![1, 6]\!]$. On suppose que le dé est équilibré définir une probailité qui modélise la situation.

p

Proposition 7.

Soit $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé fini. Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux évènements. On a :

1. $P(\varnothing) = 0$
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
3. $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$
4. Si $A \subset B$, alors $P(A) \leq P(B)$.

Démonstration : Soit $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé fini et soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux évènements.

1. On a l'égalité $\Omega = \Omega \cup \varnothing$ et $\Omega \cap \varnothing = \varnothing$ d'où d'après la définition :

$$1 = P(\Omega) = P(\Omega \cup \varnothing) = P(\Omega) + P(\varnothing) = 1 + P(\varnothing)$$

On en déduit donc

$$\boxed{P(\varnothing) = 0}$$

2. On a, de même, $\Omega = A \cup \overline{A}$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$ d'où, par définition d'une probabilité on a :

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A})$$

   On en déduit :

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

3. Rappelons les égalités $A \setminus B = A \cap \overline{B}$ et

$$A = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B), \text{ et } (A \cap \overline{B}) \cap (A \cap B) = \varnothing$$

   Ainsi d'après la définition d'une probabilité on a :

$$P(A) = P((A \setminus B) \cup (A \cap B)) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$

   On obtient donc

$$\boxed{P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)}$$

4. Supposons que $A \subset B$, on a alors $A \cap B = A$ d'où d'après ce qu'on vient de démontrer :

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A)$$

   Mais une probabilité est un réel de $[0, 1]$ donc en particulier positif. On a donc bien :

$$\boxed{P(B) \geq P(A)}$$

■

Proposition 8.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $A_1, \cdots, A_n$ n événements deux à deux incompatibles. Alors,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Démonstration : La démonstration se fait par récurrence sur n le nombre d'événements deux à deux incompatibles considéré. Pour $n = 1$ l'égalité est immédiate.
L'hérédité se démontre en remarquant que si $A_1, \cdots, A_{n+1}$ sont $n+1$ événements deux à deux incompatibles alors A_{n+1} et $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ sont incompatibles. On peut donc appliquer la définition d'une probabilité à la réunion $(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \cup A_{n+1}$ puis utiliser l'hypothèse de récurrence. ■

Corollaire 9.

Soit $\Omega, P)$ un espace probabilisé et $(A_1, \cdots, A_n)$ un système complet d'événements. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Proposition 10 (Formule du crible ou Formule de Poincaré).

Soit $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé fini.

1. Pour tous $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
2. Pour tous $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap B) + P(A \cap B \cap C).$$

Démonstration : Soit $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé fini.

1. Soient $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$, on rappelle que l'on a
$$A \cup B = (A \setminus B) \cup B, \text{ et } (A \setminus B) \cap B = \varnothing$$
D'où d'après la définition d'une probabilité :
$$P(A \cup B) = P((A \setminus B) \cup B) = P(A \setminus B) + P(B)$$
Ainsi d'après la proposition précédente :
$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$
2. Soient $A, B, C \in \mathcal{P}(\Omega)$ pour obtenir cette formule on applique celle qu'on vient de démontrer à la réunion $(A \cup B) \cup C$. On applique à nouveau cette formule aux réunions $A \cup B$ et $(A \cap C) \cup (B \cap C)$. ■

Une probabilité est donc une application dont l'espace de départ est l'ensemble des partie d'un ensemble fini (du moins dans notre chapitre). Mais si Ω est un ensemble de cardinal n, l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ est de cardinal 2^n. Pour définir une probabilité sur Ω il faut donc donner l'image de 2^n éléments et bien sûr de façon à respecter la définition d'une probabilté. Dans la proposition suivante nous allons montrer qu'une probabilité est caractérisée par l'image des singletons de l'univers.
Ainsi pour définir une probabilité il suffira de donner n réels et non plus 2^n !

Proposition 11.

Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un ensemble de cardinal fini $n \in \mathbb{N}^*$ et $(p_1, \dots, p_n)$ un n-uplet de nombres réels.

1. Si P est une probabilité sur Ω et si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$, alors :
$$\forall i \in [\![1, n]\!], p_i \geq 0 \ \text{ et } \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$
2. Réciproquement, si le n-uplet $\{p_1, \dots, p_n\}$ vérifie
$$\forall i \in [\![1, n]\!], p_i \geq 0 \ \text{ et } \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$
alors il existe une unique probabilité P sur Ω telle que $P(\{\omega_i\}) = p_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. La probabilité P est définie, pour tout événement A, par :
$$P(A) = \sum_{\substack{i=1 \\ \omega_i \in A}}^{n} p_i$$

Démonstration : Soit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ un ensemble de cardinal fini $n \in \mathbb{N}^*$ et $(p_1, \dots, p_n)$ un n-uplet de nombres réels.

1. Supposons que P est une probabilité sur Ω et que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$.
Un probabilité est un réel positif les p_i sont donc positifs pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.
De plus comme les ensembles $(\{\omega_i\})_{i \in [\![1,n]\!]}$ forment un système complet d'événements on a bien $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.
2. Réciproquement supposons que le n-uplet $\{p_1, \dots, p_n\}$ vérifie
$$\forall i \in [\![1, n]\!], p_i \geq 0 \ \text{ et } \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$
Montrons par analyse synthèse le résultat.

Analyse Supposons qu'il existe une probabilité P définie sur Ω telle que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $P(\{\omega_i\}) = p_i$.
Soit A un événement. On peut l'écrire comme réunion de ses singletons :
$$A = \bigcup_{\omega \in A} \{\omega\}$$

Ces ensembles sont deux à deux disjoints on a donc, en passant aux probabilités :

$$P(A) = P\left(\bigcup_{\omega\in A}\{\omega\}\right) = \sum_{\omega\in A} P(\{\omega\}) = \sum_{k=1}^{n} P(\{\omega_k\})\mathbb{1}_A(\omega_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k\mathbb{1}_A(\omega_k)$$

Ainsi si un telle probabilité existe elle est de cette forme et donc elle est unique.
Synthèse. Posons P l'application définie par :

$$P : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ A & \mapsto & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k\mathbb{1}_A(\omega_k) \end{cases}$$

Vérifions que P est une probabilité.

- Montrons tout d'abord que P prend ses valeurs dans $[0,1]$. Si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $0 \le \mathbb{1}_A(\omega_k) \le 1$ et donc comme chaque p_k est positif on a, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $0 \le p_k\mathbb{1}_A(\omega_k) \le p_k$. En sommant on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} p_k.0 \le \sum_{k=1}^{n} p_k.\mathbb{1}_A(\omega_k) \le \sum_{k=1}^{n} p_k.1$$

  Le terme de gauche de cette double inégalité est nulle et celui de droite est égal à 1.
- Puis que $P(\Omega) = 1$. On a

$$P(\Omega) = \sum_{k=1}^{n} p_k\mathbb{1}_\Omega(\omega_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

- Enfin soient A et B deux parties de Ω telles que $A \cap B = \varnothing$. On montre facilement que pour toute parties C et D de Ω on a $\mathbb{1}_{C\cup D} = \mathbb{1}_C + \mathbb{1}_D - \mathbb{1}_{C\cap D}$ d'où avec les hypothèses $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_D$. On a donc :

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= \sum_{k=1}^{n} p_k\mathbb{1}_{A\cup B}(\omega_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} p_k(\mathbb{1}_A(\omega_k) + \mathbb{1}_B(\omega_k)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} p_k\mathbb{1}_A(\omega_k) + \sum_{k=1}^{n} p_k\mathbb{1}_B(\omega_k) \\ &= P(A) + P(B) \end{aligned}$$

■

Exemple 6

1. On reprend l'exemple précédent, redéfinir la probabilité sur $[\![1,6]\!]$.
2. On suppose, maintenant, que le dé est déséquilibré de la façon suivante : la probabilité d'obtenir 6 est égale à $\frac{1}{2}$, et les autres faces sont équiprobables (elles ont, entre elles, les mêmes chances d'apparaître). Quelles est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

3.2 Cas de la probabilité uniforme ou équiprobabilité

Définition 12.

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini.
On dit qu'il y a **équiprobabilité**, ou que P est la **probabilité uniforme** sur l'univers fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ si pour tout $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega^2$, on a $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\})$ (i.e. les probabilités de tous les évènements élémentaires sont égales).

Proposition 13.

Il existe une unique probabilité uniforme sur Ω, notons-la P.
Pour tout évènement $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on a $P(A) = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Démonstration : Soit Ω un ensemble de cardinal fini $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la probabilité définie par la donnée pour tout $\omega \in \Omega$

$$P(\{\omega\}) = \frac{1}{n}$$

Cette donnée définit bien une probabilité puisque $\dfrac{1}{n} \geq 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$.
De plus elle vérifie bien la propriété pour être l'équiprobabilité.
Enfin si A est une partie de E. On a d'après la démonstration de la proposition 11 :

$$P(A) = \sum_{\omega \in \Omega} \frac{1}{n} \mathbb{1}_A(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in A} 1 = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$$

■

Exemple 7

1. On lance deux dés à 6 faces, équilibrés. Quelle est la probabilité que la somme des deux nombres obtenus fasse 8 ? que le plus grand des deux nombres soit impair ?
2. Un digicode permet d'ouvrir la porte d'un immeuble. On sait que le code est composé de quatre chiffres (entre 0 et 9), et se termine par une des deux lettres A ou B. De plus, on supose que les quatre chiffres sont deux à deux distincts. On tape un tel code « au hasard ». Quelle est la probabilité de tomber sur le bon code ?
3. On assiste à une course de chevaux avec trois chevaux. Il faut deviner dans quel ordre les chevaux vont arriver. Un joueur qui ne connaît rien aux chevaux décide de parier sur un ordre d'arrivée. Quelle est la probabilité qu'il gagne ?
4. On joue à une version très réduite du loto. On dispose d'une grille qui comporte cinq cases (numérotées de 1 à 5). On doit cocher trois cases. Lors du tirage, trois numéros sont sélectionnés. Quelle est la probabilité d'avoir coché les bons numéros ?

4 Probabilité conditionnelle

4.1 Un petit paradoxe

Considérons l'expérience consistant à lancer deux pièces (discernables et équilibrées) et à noter si les pièces sont tombées sur pile ou face. L'univers des résultats observables est donné par :

$$\Omega = \Big\{(F, F, (F, P), (P, F), (P, P)\Big\},$$

on le munit de l'équiprobabilité. Soit l'événement $A =$"pile est sorti" et l'événement $B =$"face est sorti". Donner les événements A et B puis calculer $P(A)$ et $P(B)$.
Supposons maintenant que nous n'assistions pas à l'expérience, et qu'un témoin nous rapporte que face est sorti. Sachant cela, quelle est selon vous la probabilité que A soit réalisé ?

Si maintenant on considère le point de vue ensembliste, si l'une des pièces donne face alors l'événement B est réalisé, cela signifie que le résultat de l'expérience ω appartient à B et donc A est réalisé si $\omega \in A \cap B$. On a alors envie d'écrire que la probailité A sachant B est :

$$\frac{\text{Card}(A \cap B)}{\text{Card}(B)} = \frac{2}{3}$$

À votre avis, quel résultat est le bon ?
Pour le savoir il faut revenir à ce qui nous a guidé pour définir la probabilité.

4.2 Définitions, propriétés

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ un évènement de probabilité non nulle ($P(A) \neq 0$).

Définition 14.

Soit B un événement de Ω.
On appelle probabilité conditionnelle de B sachant A et on note $P_A(B)$ ou $P(B \mid A)$ le nombre :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Attention : $P_A(B)$ n'a donc pas de sens si $P(A) = 0$! On dira que A n'est pas négligeable.

Proposition 15.

L'application P_A définie par :

$$P_A : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{P}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ B & \mapsto & P_A(B) \end{array} \right.$$

est une probabilité sur Ω

Démonstration : Considérons l'application P_A :

$$P_A : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{P}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ B & \mapsto & P_A(B) \end{array} \right.$$

- La première chose à vérifier est que P_A est à valeurs dans $[0, 1]$. Soit B un événement de Ω, nous avons l'inclusion $A \cap B \subset A$ et d'après la proposition 7 on a donc $P(A \cap B) \leq P(A)$. D'où, comme $P(A)$ est strictement positif on a

$$\frac{P(A \cap B)}{P(A)} \leq 1$$

  Les deux quantités étant positives on a bien $P_A(B) \in [0, 1]$.
- Montrons maintenant que $P_A(\Omega) = 1$ par définition on a :

$$P_A(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$$

- Soient B_1 et B_2 deux parties disjointes de Ω. Les parties $A \cap B_1$ et $A \cap B_2$ sont alors des parties disjointes. On a donc par définition d'une probabilité :

$$\begin{aligned} P_A(B_1 \cup B_2) &= \frac{P\big(A \cap (B_1 \cup B_2)\big)}{P(A)} \\ &= \frac{P\big((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2)\big)}{P(A)} \\ &= \frac{P(A \cap B_1)}{P(A)} + \frac{P(A \cap B_2)}{P(A)} \end{aligned}$$

  On a donc bien :

$$P_A(B_1 \cup B_2) = P_A(B_1) + P_A(B_2)$$

L'application P_A est donc bien une probabilité sur Ω. ■

Exemple 8

Dans un jeu, on présente à un candidat sept portes fermées. Il y a un cadeau derrière une seule des sept portes, et le candidat doit choisir une porte. On note A l'évènement « le cadeau n'est pas derrière la porte n° 1 ». Décrire, à l'aide de la formule donnée ci-dessus, la probabilité P_A.

Proposition 16.

Soient B et C deux évènements. On a

1. $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$.
2. $P_A(B) = P_A(A \cap B)$.
3. $P_A(B \setminus C) = P_A(B) - P_A(B \cap C)$.
4. $P_A(B \cup C) = P_A(B) + P_A(C) - P_A(B \cap C)$.

Démonstration : C'est un corollaire du fait que P_A soit une probabilité. ■

- **Remarque**. Si A et B sont deux évènements de probabilité non nulle (i.e. $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$), on a

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)P_B(A)}{P(A)}.$$

4.3 Formule des probabilités composées

Soit $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé fini.

Proposition 17.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ des évènements tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$. Alors

$$P\big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\big) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n).$$

- **Remarques**

1. Dans cette définition, les probabilités conditionnelles ont un sens : puisque l'on a supposé que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) \neq 0$, alors pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a $P(A_1 \cap \cdots \cap A_k) \neq 0$.
2. Remarquer que le cas $n = 2$ est la définition d'une probabilité conditionnelle.
Écrire les cas $n = 3$ et $n = 4$.

Démonstration : Nous allons procéder à une récurrence sur le nombre d'événements considérés.
Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ on note $\mathcal{P}(n)$ l'assertion ;

Pour tout n-uplet d'événements de Ω, on a :

$$P\big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\big) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Comme dit plus haut le cas $n = 2$ est la définition d'une probabilité conditionnelle. On a donc initialisé la propriété.
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie et déduisons en $B(n+1)$.
Soit $A_1, \cdots, A_{n+1}$, $n+1$ événements de Ω tels que $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \neq 0$. En considérant les ensembles $A_1 \cap \cdots A_n$ et A_{n+1} et en y appliquant la définition d'une probabilité conditionnelle on a :

$$P\big((A_1 \cap \cdots A_n) \cap A_{n+1}\big) = P\big(A_1 \cap \cdots \cap A_n\big) \times P_{A_1 \cap \cdots \cap A_n}\big(A_{n+1}\big)$$

Mais $\mathcal{P}(n)$ est supposée vraie et comme $P(A_1 \cap \cdots A_n) \neq 0$ alors $P(A_1 \cap \cdots A_{n-1}) \neq 0$ en effet $0 < P(A_1 \cap \cdots A_n) \leq P(A_1 \cap \cdots A_{n-1})$. d'où

$$P\big(A_1 \cap \cdots A_n \cap A_{n+1}\big) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdot \ldots \cdot P_{A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n) \times P_{A_1 \cap \cdots \cap A_n}\big(A_{n+1}\big)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ on a donc bien $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.
Le principe de récurrence permet ainsi de conclure. ■

Exemple 9

Une urne contient dix boules : trois boules blanches, et sept boules noires. On tire successivement trois boules sans remise. Quelle est la probabilité de tirer les trois boules blanches ?

4.4 Formule des probabilités totales et formule de Bayes

Soit $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé fini.

Proposition 18 (Formule des probabilités totales)**.**

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements fini (I est donc un ensemble fini). Pour tout évènement B, on a
$$P(B) = \sum_{i\in I} P(B\cap A_i).$$
En particulier, si : $\forall i \in I,\ P(A_i) \neq 0$, on a $P(B) = \displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i)P_{A_i}(B)$.

Exemple 10

1. On reprend l'exemple du paragraphe précédent. Quelle est la probabilité de tirer une boule noire au deuxième tirage ?
2. Dans un jeu, une première phase consiste à lancer un dé équilbré. On note n le résultat obtenu. La deuxième phase consiste à lancer le dé n fois. Le « score » est le maximum des résultats obtenus dans les lancers de la deuxième phase. Quelle est la probabilité d'avoir un score égal à 6 ?

Proposition 19 (Formule de Bayes)**.**

Soit $(A_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements fini (I est donc un ensemble fini). On suppose que ; $\forall i \in I,\ P(A_i) \neq 0$.
Pour tout évènement B tel que $P(B) \neq 0$, et pour tout $i_0 \in I$, on a
$$P_B(A_{i_0}) = \frac{P(A_{i_0})P_{A_{i_0}}(B)}{\displaystyle\sum_{i\in I} P(A_i)P_{A_i}(B)}.$$

Exemple 11

1. On reprend l'exemple 1 précédent. On suppose que la deuxième boule tirée est blanche. Quelle est la probabilité que la première ait été blanche ?
2. On reprend l'exemple 2. On suppose que le score est égal à 6. Quelle est la probabilité qu'on ait eu droit à six tirages pour la seconde phase ?

5 Indépendance

Soit $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$ un espace probabilisé fini.
Intuitivement, on considère que deux événements A et B sont indépendants quand la réalisation de l'un n'apporte pas d'informations sur la réalisation de l'autre. Si ni A ni B ne sont de probabilité nulle, on peut le traduire par :
$$P_A(B) = P(B) \qquad \text{et} \qquad P_B(A) = P(A)$$
En généralisant cette formule on obtient la définition suivante :

Définition 20.

Soient A et B deux évènements. On dit que A et B sont **indépendants** si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

- **Remarques**

1. Si $P(A) \neq 0$ et si A et B sont indépendants on retrouve $P_A(B) = P(B)$.
2. Si A et B sont incompatibles (i.e. $A \cap B = \varnothing$), alors A et B ne sont en général pas indépendants.

Exemple 12

1. On reprend l'exemple 1 du paragraphe précédent. On note, pour $k \in [\![1, 3]\!]$, B_k l'évènement « obtenir une boule blanche au $k^{\text{ème}}$ tirage. Les évènements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?
2. On lance deux fois un dé équilibré, et on note, dans l'ordre, les résultats obtenus. Soit $(i, j) \in [\![1, 6]\!]$. On note A_i l'évènement « obtenir i au premier lancer » et B_j l'évènement « obtenir j au deuxième lancer ». Les évènements A_i et B_j sont-ils indépendants ?

Proposition 21.

Soient A et B deux évènements. On suppose que A et B sont indépendants. Alors $\overline{A}$ et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ sont indépendants, $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants.

Définition 22.

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soient $A_1, \dots, A_n$ des évènements. On dit que $A_1, \dots, A_n$ sont **mutuellement indépendants** si pour tout $I \subset [\![1, n]\!]$, on a

$$P\Big(\bigcap_{i \in I} A_i\Big) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Exemple 13

1. On lance trois fois un dé. On note A l'évènement « obtenir un nombre pair au premier lancer », B l'évènement « obtenir 2 au deuxième lancer », et C l'évènement « ne pas obtenir 5 au troisième lancer ». Alors A, B et C sont mutuellement indépendants.
2. Une urne contient un certain nombre de boules. On effectue n tirages successifs ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$) avec remise. Si, pour chaque $i \in [\![1, n]\!]$, A_i désigne un évènement relatif au $i^{\text{ème}}$ tirage, et seulement celui-ci, alors les évènements $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants.

- **Remarque**. Si $A_1, \dots, A_n$ sont mutuellement indépendants, alors $A_1, \dots, A_n$ sont deux à deux indépendants.

La réciproque est fausse : il se peut que des évènements $A_1, \dots, A_n$ soient deux à deux indépendants sans être mutuellement indépendants.

Par exemple, considérons l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux fois un dé équlibré. Soient les évènements :

— A_1 : « le premier nombre obtenu est pair »

— A_2 : « le deuxième nombre obtenu est impair »

— A_3 : « la somme des deux nombres obtenus est paire ».

Les évènements A_1, A_2, A_3 sont deux à deux indépendants, mais ne sont pas mutuellement indépendants.