Probabilités sur un univers fini

1 Combinatoire

Exercice 1.

En informatique, un octet est la donnée d'un 8-uplet de nombres égaux à 0 ou 1.

1. Combien y a-t-il d'octets possibles ?
2. Combien y a-t-il d'octets présentant exactement quatre fois le nombre 1 ?
3. Combien y a-t-il d'octets présentant exactement six fois le nombre 0 ?
4. Combien y a-t-il d'octets présentant exactement six fois le nombre 0, et tels que le dernier nombre soit égal à 0 ?
5. Combien y a-t-il d'octet présentant au moins deux fois le nombre 1 ?
6. On considère maintenant deux octets consécutifs.
 - (a) Dans cette question, on veut que le dernier nombre du premier octet soit égal au premier nombre du deuxième. Combien y a-t-il de possibilités ?
 - (b) Dans cette question, on veut que le premier octet présente exactement trois fois le nombre 1, et que le deuxième octet présente au moins une fois le nombre 1. Combien y a-t-il de possibilités ?

Exercice 2.

Une main au poker est un ensemble de cinq cartes prises dans un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains contenant :

1. une couleur (cinq cartes de même symbole (cœur, carreau, trèfle ou pique)) ?
2. un carré (quatre cartes de même hauteur) ?
3. un full (trois cartes d'une même hauteur et deux cartes d'une même hauteur, différente de la première) ?
4. un brelan (trois cartes de même hauteur) ?
5. deux paires (deux cartes d'une même hauteur, et deux cartes d'une même hauteur, différente de la première) ?
6. une paire ?

Il est entendu qu'une main contenant une paire n'est pas une main contenant deux paires, ou un brelan, etc...

Exercice 3.

Un étudiant possède quinze livres de quatre matières différentes : quatre livres de mathématiques, cinq d'histoire, trois de philosophie et trois de français. Il veut les ranger sur une étagère.

1. Combien y a-t-il de rangements possibles, si l'on ne tient pas compte des matières ?
2. Combien y a-t-il de rangements possibles, si l'on range d'abord les livres de mathématiques, puis ceux d'histoire, puis ceux de philosophie, et enfin ceux de français ?
3. Combien y a-t-il de façons de ranger les livres de sorte qu'ils soient regroupés par matière ?
4. Combien y a-t-il de façon de ranger les livres de sorte que ceux d'histoire soient regroupés, que ceux de philosophie soient regroupés, et qu'un des livres d'histoire soit à côté d'un des livres de philosophie ?

Exercice 4. (D'après ESCP Europe 2010)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $M \in \llbracket 1, N \rrbracket$.

Une urne contient N boules numérotées de 1 à N . Les boules numérotées de 1 à M sont rouges, les autres sont blanches.

1. Soit $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$. On tire successivement et sans remise n boules de l'urne. Décrire tous les résultats possibles. Calculer le nombre de résultats possibles.
2. On introduit les ensembles suivants : pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$A_k : \text{« la } k^{\text{ème}} \text{ boule tirée est rouge ».}$$

- (a) Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, calculer le cardinal de A_k .
- (b) Calculer, pour $(k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ tel que $k \neq \ell$, le cardinal de $A_k \cap A_\ell$.

Exercice 5.

Soit $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. Combien l'équation $x_1 + \dots + x_n = k$ a-t-elle de solutions dans $\mathbb{N}^n$? dans $(\mathbb{N}^*)^n$? dans $\mathbb{Z}^n$?

2 Probabilités classiques

Exercice 6.

On lance un dé pipé, à six faces. On observe le numéro obtenu.

Préciser l'univers des résultats possibles. Quelles doivent être les probabilités des événements élémentaires pour qu'il y ait deux fois plus de chances d'avoir un nombre pair qu'un nombre impair, et pour que les nombres impairs soient équiprobables, et les nombres pairs équiprobables ?

Exercice 7.

Un urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges et 2 boules vertes indiscernables au toucher. On tire simultanément trois boules dans l'urne. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

- A : "les boules sont toutes de couleurs différentes",
- B : "les boules sont toutes de la même couleur",
- C : "exactement une boule est verte".

Exercice 8.

On dispose de trois dés équilibrés (un rouge, un vert, un bleu). On les lance tous les trois, et on note le résultat de chacun d'entre eux.

1. Quel est l'univers des résultats observables ? On le munit de la probabilité uniforme, que l'on note P .
2. Décrire explicitement l'évènement « le dé rouge donne 6 ». Décrire aussi l'évènement « le dé rouge et le dé vert donnent 6 », ainsi que l'évènement « les trois dés donnent 6 ».
3. On note R (resp. V , B) l'évènement « le dé rouge (resp. vert, bleu) donne 6 ». On note U l'évènement « au moins un des trois dés donne 6 ». Exprimer $P(U)$ en fonction de $P(\overline{R} \cap \overline{V} \cap \overline{B})$, et en déduire la valeur de $P(U)$.
4. Voici une autre façon de calculer $P(U)$: exprimer $P(U)$ en fonction des probabilités des événements R, V, B et de leurs intersections (sans utiliser de complémentaire), et en déduire $P(U)$.

Exercice 9.

On considère une classe de 44 élèves. Quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves aient leur anniversaire le même jour (On suppose qu'aucun élève n'est né le 29 février).

3 Indépendance

Exercice 10.

On lance n fois une pièce truquée, où la probabilité d'obtenir pile est $\frac{1}{3}$. Quelle est la probabilité d'obtenir le premier face au n -ième lancer ?

Exercice 11.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. On effectue n lancers indépendants d'une pièce pour laquelle la probabilité d'obtenir pile est p , avec $p \in]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?
2. Quelle est la probabilité qu'au cours de ces n lancers, face ne soit jamais suivi de pile ?

4 Probabilités conditionnelles**Exercice 12.**

Un laboratoire fabrique un test pour détecter une maladie chez les patients. Des essais ont montré que 96 fois sur 100, le test est positif quand le patient est malade, et que 94 fois sur 100, le test est négatif quand le patient n'est pas malade.

Une étude a montré que 3% de la population est atteinte par cette maladie.

Une personne se présente et fait le test, qui est positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit atteinte par la maladie ?

Exercice 13.

Un joueur dispose d'un jeu de 52 cartes. Il tire successivement et sans remise cinq cartes.

Pour chaque $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$, on note $\heartsuit_i$ (resp. $\diamondsuit_i, \clubsuit_i, \spadesuit_i$) l'évènement « la $i^{\text{ème}}$ carte tirée est un cœur (resp. un carreau, un trèfle, un pique) ».

1. Soit $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$. Montrer que la famille $(\heartsuit_i, \diamondsuit_i, \clubsuit_i, \spadesuit_i)$ est un système complet d'évènements.
2. Quelle est la probabilité que les deux premières cartes tirées soient des cœurs ?
3. Quelle est la probabilité que la troisième carte tirée soit un carreau ?
4. Quelle est la probabilité d'avoir au total tiré exactement quatre trèfles ?
5. On suppose dans cette question que la deuxième carte tirée est un pique. Quelle est la probabilité que la première ait été un pique ?
6. On suppose dans cette question que la troisième carte tirée est un carreau. Quelle est la probabilité que la première ait été un cœur ?

Exercice 14.

Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés tels que la probabilité d'apparition du 6 soit $\frac{1}{2}$.

On prend un dé au hasard, on le jette, on obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé soit pipé ?

Exercice 15.

Une araignée se déplace sur sa toile entre trois points A, B et C formant un triangle équilatéral. Au départ, elle se trouve sur l'un des sommets. Lorsqu'elle est sur l'un quelconque des sommets, elle va sur l'un des deux autres sommets avec une probabilité $\frac{1}{2}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note E_n l'évènement "au bout de n déplacements, l'araignée se retrouve à son point de départ" et on pose $p_n = P(E_n)$.

1. Que vaut p_0 ? p_1 ?
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire p_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16.

Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit $p \in]0, 1[$. Notons $q = 1 - p$.

On effectue N lancers successifs et indépendants d'une pièce de monnaie, et on note à chaque lancer si l'on obtient pile ou face. On suppose qu'à chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile vaut p (et celle d'obtenir face vaut q).

1. Quelle est la probabilité d'obtenir pile au premier lancer, et face au deuxième ?
2. Quelle est la probabilité de n'obtenir que pile sur les N lancers ? de n'obtenir que face ?

3. Pour $n \in \llbracket 1, N-1 \rrbracket$, on note A_n l'évènement « la séquence "pile, face" apparaît pour la première fois aux rangs n et $n+1$ ». Calculer la probabilité de A_n .
4. Calculer la probabilité que la séquence "pile, face" n'apparaisse jamais.

Exercice 17.

On lance deux pièces truquées : la pièce 1 donne pile avec une probabilité $p_1 \in]0, 1[$ et la pièce 2 donne pile avec une probabilité $p_2 \in]0, 1[$. Au premier lancer, on choisit une pièce au hasard (avec équiprobabilité) et on la lance. Puis on effectue une suite de lancers comme suit : si le n -ième lancer a donné pile, avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors le $n+1$ -ième lancer s'effectue avec la même pièce qu'au n -ième lancer, et si on obtient face, il s'effectue avec l'autre pièce.

On introduit, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les événements U_n : "le n -ième lancer s'effectue avec la pièce 1" et on pose $P(U_n) = u_n$.

1. (a) Calculer la probabilité de ne jamais lancer la pièce 2 au cours des n premiers tirages ($n \geq 1$).
 (b) Calculer la probabilité de jeter pour la première fois la pièce 2 au n -ième lancer (séparer $n = 1$ et $n \geq 2$).
2. (a) Trouver une relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n .
 (b) En déduire u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Quelle est la probabilité, notée r_n , d'obtenir pile au n -ième lancer ? Calculer la limite de r_n quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 18.

On considère deux urnes A et B contenant chacune au départ une boule blanche et une boule noire. On réalise n fois l'expérience suivante :

- on tire une boule d'une des urnes,
- si elle est blanche, on la remet dans cette même urne et le tirage suivant se fait dans cette urne,
- si elle est noire, on la met dans l'autre urne et le tirage suivant se fait dans cette autre urne.

Le premier tirage se fait dans l'urne A .

1. Quelle probabilité a-t-on de tirer n fois dans la même urne ?
2. Quelle probabilité a-t-on de procéder au n -ième tirage dans l'urne A ?
3. Quelle probabilité a-t-on d'obtenir au n -ième tirage une boule blanche ?

Exercice 19.

Une urne contient b boules blanches et b boules noires ($b \geq 1$). On effectue n tirages successifs d'une boules.

1. *Premier protocole* : les tirages se font avec remise.
 Quelle est la probabilité que toutes les boules tirées soient blanches ?
2. *Deuxième protocole* : les tirages se font sans remise.
 Quelle est la probabilité que toutes les boules tirées soient blanches ?

3. *Troisième protocole* :

- si on tire une boule blanche, on la remet dans l'urne,
- si on tire une boule noire, on la remet dans l'urne et on rajoute b boules blanches.

Quelle est la probabilité que toutes les boules tirées soient blanches ? Que toutes les boules tirées soient noires ?

Exercice 20.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $A_1, \dots, A_n$ sont des événements associés à une expérience aléatoire. On suppose disposer d'une probabilité P sur l'univers des résultats observables.

Montrer la **formule du crible** (ou : **de Poincaré**)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

On pourra raisonner par récurrence sur n .