Duel

Dans cet exercice, n sera un entier naturel non nul. On considère deux joueurs Alice et Bob qui disputent une partie d'un jeu qui se joue en $N = 2n$ manches. Une manche consiste à tirer une boule dans une urne contenant $N-1$ boules noires, et une boule blanche. La manche est remportée si la boule blanche est tirée. Alice et Bob disputent les manches à tour de rôle : Alice dispute la première manche, Bob la deuxième, puis Alice la troisième etc... Le premier joueur à remporter une manche (si cela arrive) gagne la partie. Il est plus commode, pour définir les événements ci-dessous, de considérer que toutes les manches sont disputées (même si on peut connaître le gagnant très tôt).

Dans les deux parties du problème, on supposera la situation correctement modélisée par un espace probabilisé qu'on notera chaque fois (Ω, P) et qu'on ne cherchera pas à expliciter. Pour $k \in [\![1, 2n]\!]$ on pose

G_k : « la *manche* k est remportée par le joueur qui la dispute »
A_k : « Alice remporte la *partie* à la $k$ème manche »
B_k : « Bob remporte la *partie* à la $k$ème manche »

Par la suite, on notera $\mathcal{G}$ la famille d'événements $(G_1, G_2, \ldots, G_{2n})$

$\boxed{1}$ Règle avec remise.

1. Qu'est-il naturel de supposer sur les événements de $\mathcal{G}$?
   Pour $i \in [\![1, 2n]\!]$, que vaut $P(G_i)$?
   On notera ce nombre p dans la suite, et $q := 1-p$.
   Exprimer à l'aide des événements de $\mathcal{G}$ l'événement C : « la partie n'est gagnée par personne »puis calculer $P(C)$.
2. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Pourquoi a-t-on $P(A_{2k}) = P(B_{2k-1}) = 0$?
3. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Exprimer l'événement A_{2k+1} à l'aide des événements de $\mathcal{G}$ puis calculer $P(A_{2k+1})$.
4. Soit A l'événement « Alice gagne la partie ». Montrer que $P(A) = \dfrac{1-q^{2n}}{1+q}$.
5. Calculer $P(B)$, où B est l'événement « Bob gagne la partie ».
   Vérifier que $P(A) > P(B)$. Commenter.

$\boxed{2}$ Règle sans remise.

1. Sans calcul, expliquer pourquoi avec la nouvelle règle, l'événement C a une probabilité nulle.
2. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Exprimer l'événement A_{2k+1} à l'aide des événements de $\mathcal{G}$ puis calculer $P(A_{2k+1})$ avec la nouvelle règle. Commenter.
3. Calculer $P(A)$ puis $P(B)$.