Problème 2 : Commutant d'un endomorphisme cyclique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit qu'un vecteur a de E est **cyclique** pour u si

$$(a, u(a), u^2(a), \dots, u^{n-1}(a)) \text{ est une base de } E.$$

On appelle alors cette base *cycle* de a. L'endomorphisme u est dit **cyclique** si il existe un vecteur cyclique pour u.

Partie A. Exemples.

1. Dans cette question, $E = \mathbb{R}_p[X]$ avec $p = n - 1$, et $u : P \mapsto P'$ est l'endomorphisme de dérivation. Montrer que X^p est cyclique.
2. Prouver que si u est cyclique, alors $\mathrm{rg}(u) \geq n - 1$.
   L'endomorphisme nul est-il cyclique ?

Partie B. Commutant d'un endomorphisme.

Dans cette partie, il n'est pas fait d'hypothèses sur u. Rappelons que $\mathscr{L}(E)$, muni de l'addition des applications linéaires et de leur multiplication par un scalaire, est un espace vectoriel de dimension n^2. On appelle **commutant** de l'endomorphisme u l'ensemble

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathscr{L}(E) : v \circ u = u \circ v\}.$$

1. Prouver que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
2. Prouver l'inclusion $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \dots, u^{n-1}) \subset \mathcal{C}(u)$.

Partie C. Commutant d'un endomorphisme cyclique.

Dans cette partie, on suppose que u est cyclique et que a est un vecteur cyclique pour u. Soit $v \in \mathcal{C}(u)$. On décompose $v(a)$ sur le cycle de a :

$$\exists!(\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n : v(a) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(a).$$

1. Prouver que $v = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j$ en prouvant que ces applications coïncident sur une base. Quelle inclusion vient-on d'établir ?
2. Calculer $\dim(\mathcal{C}(u))$.