Lycée Condorcet Mai 2024
PCSI

Applications linéaires

Dans cette feuille d'exercices, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Noyau, image, rang et théorème du rang

Exercice 1.
Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$u_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+3z, 4x+5y+6z, 7x+8y+9z) \end{array}$$

$$u_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+3z+1, 4x+5y+6z, 7x+8y+9z-1) \end{array} \qquad u_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (yz, zx, xy) \end{array}$$

$$u_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (1, x-y) \end{array} \qquad u_5 : \begin{array}{ccc} \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0)+3f(1) \end{array} \qquad u_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & |P(1)| \end{array}.$$

Exercice 2.
Préciser le noyau et l'image des applications linéaires suivantes (on peut décrire chacun des espaces par des équations, ou donner une base, ou les deux).

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f_1(x,y) = (x-2y\ ,\ x+9y)$.
2. $f_2 : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ telle que : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{C}^3,\ f_2(x,y,z) = (x+5y-3z\ ,\ 6x-45y-3z)$.
3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f_3(x,y,z) = (x-2y+z\ ,\ x+3y-4z\ ,\ x+y-2z)$.

Exercice 3.
Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & AM - MA \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 4.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On suppose que A est inversible.
   (a) Montrer que f est injective.
   (b) L'application f est-elle surjective ?
3. On suppose que f est surjective . Montrer que A est inversible.

Exercice 5.
On considère l'application h définie par :

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(0), P'(0), P''(0)\big) \end{array}$$

1. Montrer que h est linéaire.
2. Déterminer une base de l'image.
3. L'application est-elle bijective ?

Exercice 6.
Soit Δ l'application de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

1. Préciser le degré de $\Delta(P)$ en fonction du degré de P.
2. Montrer que Δ est linéaire et préciser son noyau.
3. Montrer que Δ induit un isomorphisme d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}[X]$ à déterminer sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7.
Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_4[X]$, notons respectivement $u(P)$ et $v(P)$ le quotient et le reste de la division euclidienne de P par X^2-3X+2. On définit ainsi deux applications $u : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ et $v : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_1[X]$.

1. Justifier l'affirmation de l'énoncé selon laquelle u est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et v est à valeurs dans $\mathbb{R}_1[X]$.
2. Montrer que u et v sont linéaires.
3. Donner le noyau et l'image de u (on donnera un base de chacun de ces espaces).
4. Donner le noyau et l'image de v (on donnera un base de chacun de ces espaces).

Exercice 8.
Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles. Soit f l'application qui à une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite $v = f(u)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = u_{n+1} - 2u_n$.

1. (a) Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n$. Déterminer $f(u)$.
   (b) Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3 \times 2^n + 1$. Déterminer $f(u)$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de E.
3. Déterminer son noyau.

2 Manipulation des définitions de noyau et image

Exercice 9.
Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
   Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f\big(\mathrm{Ker}(g \circ f)\big) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$.
3. Soit f une **forme** linéaire sur E, **non nulle** (i.e. $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et $f \neq 0$). Montrer que f est surjective.

Exercice 10.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^2 - 5f + 6Id_E = 0_{\mathcal{L}}$. Montrer que :

$$E = \ker(f - 2Id_E) \oplus \ker(f - 3Id_E)$$

Exercice 11.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ telq eu $Im(u) = \ker(u)$ si et seulement si n est pair.
Montrer qu'alors pour un tel $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe une base de E de la forme :

$$(e_1, e_2, \cdots, u(e_1), u(e_2), \cdots, u(e_n))$$

Exercice 12.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $f \circ g \in GL(E)$.
2. f est surjective, g est injective, et $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.
3. f est surjective, g est injective, $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g \circ f \circ g \circ f)$, et $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(g \circ f \circ g \circ f)$.

Exercice 13. (Noyaux itérés)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $n_k = \ker(u^k)$ et $I_k = \Im(u^k)$.

1. Montrer que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante (pour l'inclusion), et que $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante (toujours pour l'inclusion).
2. Montrer que $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ croît strictement jusqu'à un certain rang n_0 à partir duquel elle est stationnaire.
3. Montrer que dans ce dernire cas, $N_{n_0} \cap I_{n_0} = \{0\}$.

3 Projections et symétries

Exercice 14.
Soit E_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par : $E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.
Soit E_2 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 2, 1)$.

1. Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Notons p la projection sur E_1 parallèlement à E_2, et q la projection sur E_2 parallèlement à E_1. Exprimer, pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, $p(x,y,z)$ et $q(x,y,z)$ en fonction de x, y, z.
3. Écrire le vecteur $(2, 2, 3)$ comme somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2.
4. Donner l'expression de la symétrie s par rapport à E_1 parallèlement à E_2.

Exercice 15.
Soit

$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z \ , \ y \ , \ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z \right) \end{array} .$$

Montrer que p est une projection, et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 16.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Notons p la projection sur E_1 parallèlement à E_2, et q la projection sur E_2 parallèlement à E_1.
Montrer que $p + q = \mathrm{Id}_E$, $p \circ q = 0$, $q \circ p = 0$.

Exercice 17.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soient p et q deux **projecteurs** de E tels que $p \circ q = q \circ p$, et $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q)$.
Montrer que $p = q$.

Exercice 18.
Soit $A \in \mathbb{R}[X]$, $A \neq 0$. On considère l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ qui à P associe le reste de la division euclidienne de P par A. Montrer que f est un projecteur et déterminer son image et son noyau.

Exercice 19.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. Montrer que

1. $Id_E - p$ est un projecteur.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$, $p - \lambda Id_E$ est un automorphisme.

4 Endomorphismes nilpotents

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit u un endomorphisme de E. On dit que u est **nilpotent** si

$$\exists p \in \mathbb{N}, \quad u^p = 0$$

L'ensemble des entiers p vérifiant $u^p = 0$ est alors non vide et minoré par 0, il admet donc un plus petit élément. Cet entier est appelé **l'indice de nilpotence** de u.

Exercice 20.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie tel que :

$$\forall x \in E, \quad \exists p_x \in \mathbb{N}, \quad u^{p_x}(x) = 0.$$

Montrer que u est un endomorphisme nilpotent.
Ce résultat est-il vrai si on ne suppose plus E de dimension finie ?

Exercice 21.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E nilpotent d'indice de nilpotence 2 ($u \circ u = 0$).

1. Donner un exemple non trivial d'une telle application u pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe une application linéaire f de E vers $\mathbb{K}$ et a un élément de E tels que

$$\forall x \in E, \quad u(x) = f(x)a$$

Exercice 22.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence p.

1. Soit $x_0 \in E\backslash \ker(f^{p-1})$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est libre.
2. En déduire que $f^n = 0$.
3. Soit $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f + g \in GL(E)$.