Lycée Condorcet
PCSI

Mai 2024

Intégration sur un segment

Sommes de Riemann

Exercice 1.
Monter que les suites suivantes sont convergentes, et trouver leur limite.

$$a)\ \ u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{n^{3/2}} \qquad b)\ \ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{2n} \quad c)\ \ w_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \qquad d)\ \ t_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Suites et intégrales

Exercice 2.

1. Calculer, pour tout $n \geq 2$, $\displaystyle\int_2^n \frac{1}{x\ln x}dx$.
2. Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x\ln x}dx \leq \frac{1}{k\ln k}$.
3. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k\ln k}$. Montrer que $S_n \to_{n\to+\infty} +\infty$.

Exercice 3.

1. Justifier que : $\forall t \in [0,1[, \forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k = \frac{1}{1-t} - \frac{t^{n+1}}{1-t}$.

   En déduire que : $\forall x \in [0,1[, \forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \ln(1-x) = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{t-1}dt$.
2. En déduire que : $\forall x \in [0,1[, \forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \ln(1-x)\right| \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)(1-x)}$

   puis que : $\forall x \in [0,1[, \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$

Exercice 4. Attention aux intervertion limite et intégrale !

1. On suppose ici qu'on a $x \in [0,1]$. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nxe^{-nx^2}$.
2. Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5.
Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x^2}dx$$

1. Calculer u_0 (on pourra écrire $\frac{1}{1-x^2}$ sous la forme $\frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$.). Puis calculer u_1.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n - u_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$
En déduire u_2 et u_3.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Monter que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq u_n \leq \frac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$$
Que peut-on en conclure ?

Exercice 6.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2} t \; dt$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} + t_n = \dfrac{1}{2n+3}$.
2. Étudier la monotonie de la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nt_n$ (tout en justifiant que cette limite existe).

Exercice 7. Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$.

1. Calculer W_0 et W_1.
2. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$.
   En déduire une relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n.
4. Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \dfrac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \dfrac{\pi}{2}$.
5. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et préciser sa valeur.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n+1}{n+2} \leq \dfrac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$ et en déduire que $W_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} W_n$
7. Montrer que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$

Exercice 8.

1. (a) Montrer que, pour tout $k \geq 2$, $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \ln t \; \mathrm{d}t \leq \ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t \; \mathrm{d}t$
   (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\displaystyle\int_1^n \ln t \; \mathrm{d}t \leq \ln(n!) \leq \int_1^n \ln t \; \mathrm{d}t + \ln n$
2. Pour tout $x > 0$, calculer $F(x) = \displaystyle\int_1^x \ln(t) \; \mathrm{d}t$.
3. En déduire que $\ln(n!)$ est équivalent à $n \ln n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Fonctions définies par une intégrale

Exercice 9.

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \varphi(a) = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^a}dx$.

1. Montrer que φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que : $\forall \alpha \in]0,1[,\ 1-\alpha < \sqrt{1-\alpha} < 1 - \dfrac{\alpha}{2}$.
3. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*,\ \dfrac{a}{a+1} < \varphi(a) < \dfrac{a+1/2}{a+1}$.

Exercice 10.

On considère la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^4}dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F, et préciser son signe en fonction de x.
2. Étudier la parité de F.
3. Justifier que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations. Retrouver le signe de F.

Exercice 11.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \exp(-t^2)dt$.

1. (a) Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que g est une fonction impaire.
   (c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
2. (a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$.
   (b) Dresser le tableau de variations de g. On précisera $g(0)$.
   (c) Montrer que :
   $$\forall x \in]0,+\infty[, x\exp(-4x^2) \leq g(x) \leq x\exp(-x^2).$$
   En déduire la limite de g en $+\infty$, puis en $-\infty$.