$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. *Preuve de Matsuoka.*

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit

$$I_p = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J_p = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2p}(t)\mathrm{d}t.$$

On note que $(I_p)_{p\geq 0}$ est extraite de la suite des intégrales de Wallis (termes pairs).

1. (a) Établir, pour p entier naturel l'égalité $I_{p+1} = \dfrac{2p+1}{2p+2} I_p$.

   (b) Déduire de ce qui précède que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_p > 0$.
   Donner une deuxième preuve en vous appuyant *précisément* sur une propriété du cours d'intégration.

2. (a) Donner le graphe de la fonction sin sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, sur lequel on fera figurer la tangente en 0, et surtout la corde entre les points d'abscisses 0 et $\pi/2$. En déduire graphiquement l'inégalité

   $$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t).$$

   Établir ceci soigneusement en étudiant la fonction $u : t \mapsto \frac{\pi}{2}\sin(t) - t$.

   (b) Montrer pour $p \in \mathbb{N}$ l'inégalité

   $$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}\left(I_p - I_{p+1}\right).$$

   (c) Démontrer que le quotient $\dfrac{J_p}{I_p}$ tend vers 0.

3. (a) Soit $p \geq 1$. En intégrant par parties deux fois I_p, l'exprimer à l'aide de J_{p-1} et J_p.

   (b) En déduire que pour tout $p \geq 1$, $\dfrac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \dfrac{J_p}{I_p} = \dfrac{1}{2p^2}$.

   (c) En sommant, en déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$.

   (d) Une somme associée : que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2}$?