

Applications linéaires

Table des matières

1	Généralités	2
1.1	Définitions et exemples	2
1.2	Opérations sur les applications linéaires	3
1.3	Noyau et image d'une application linéaire	5
2	Isomorphismes	6
2.1	Réciproque et composée	6
2.2	Isomorphismes et dimension finie	7
2.3	Espaces isomorphes	7
3	Modes de définition d'une application linéaire	10
3.1	Utilisation d'une base	10
3.2	Utilisation d'espaces supplémentaires	11
4	Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel.	11
4.1	Identité, homothéties	11
4.2	Projecteurs	11
4.3	Symétries	12
5	Rang d'une application linéaire	13
5.1	Définition	13
5.2	Formule du rang	14
6	Équations linéaires	14
7	Formes linéaires et hyperplans	16

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soient $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Généralités

1.1 Définitions et exemples

Définition 1.

Soit f une application de E dans F . On dit que f est une **application linéaire** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\forall (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$;
2. $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

• **Notation.** On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Exemple 1

1. L'application nulle de E dans F :

$$0_{\mathcal{L}(E, F)} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & 0_F \end{array} .$$

est une application linéaire.

2. Les applications linéaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications de la forme $x \mapsto ax$, où $a \in \mathbb{R}$.
3. Les applications suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ne sont pas linéaires.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x + 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} .$$

4. Les applications suivantes sont linéaires.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & 2x - 5y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 2y - z, 3x - 4y - 6z, x) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y) & \longmapsto & (2y, 3x, x + \sqrt{2}y, -5x + y) \end{array} .$$

5. Les applications suivantes ne sont pas linéaires.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & 2x^2 - 5y \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + 2y - z, 3x - 4y - 6z, x - 2) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y) & \longmapsto & (2y, 3x, x + \sqrt{2}y, -5xy) \end{array}$$

6. Les applications suivantes sont linéaires.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & u(0) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_6[X] \\ P & \longmapsto & X^2P + P' + P(3) \end{array} .$$

7. Les applications suivantes ne sont pas linéaires.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & u(0) + 1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & (P')^2 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_4[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_6[X] \\ P & \longmapsto & X^2P + P' + P(3)P(2) \end{array} .$$

Proposition 2.

Soit f une application E dans F . Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. $f \in \mathcal{L}(E, F)$.
2. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \forall (x, y) \in E^2, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.

• **Remarque.** Si f est une application linéaire de E dans F , alors :

1. $f(0_E) = 0_F$;
2. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, et tous vecteurs $x_1, \dots, x_n \in E$, on a $f\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k\right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k)$.

• **Vocabulaire**

1. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est une bijection, on dit que f est un **isomorphisme**. Quand il existe un isomorphisme entre E et F , on dit que E et F sont **isomorphes**.
2. Si $E = F$, on note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$, et toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E)$ s'appelle un **endomorphisme** de E .
3. Si $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme de E et si f est bijective, on dit que f est un **automorphisme** de E . On note $GL(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .
4. Si $F = \mathbb{K}$, toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ s'appelle une **forme linéaire**.

Exemple 2

1. L'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_2[X]$ définie par : $\forall (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$, $f(a_0, a_1, a_2) = a_0 + a_1X + a_2X^2$ est un isomorphisme entre $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$.
2. L'application nulle de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
3. L'application $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $u(x, y) = (x + y, 2x - y)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$. Comme de plus u est bijective, c'est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$.
4. L'application identité de E dans E , Id_E , définie par : $\forall x \in E$, $\text{Id}_E(x) = x$, est un endomorphisme de E . Comme de plus Id_E est bijective, c'est un automorphisme de E .
5. Les applications suivantes sont des formes linéaires sur $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & x + 2y + 3z - t \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & x \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z, t) & \longmapsto & 3z \end{array} .$$

6. Les applications suivantes sont des formes linéaires sur $\mathbb{C}_3[X]$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P & \longmapsto & P(0) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ P & \longmapsto & 3P'(2) \end{array} .$$

1.2 Opérations sur les applications linéaires

Nous avons déjà vu que l'ensemble F^E des applications de E dans F était muni d'une structure d'espace vectoriel. On rappelle ici la définition des lois internes et externes.

Définition 3.

Pour $f, g \in F^E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose

$$\begin{array}{ccc} f + g : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) + g(x) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \lambda \cdot f : E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array} ,$$

(en pratique, $\lambda \cdot f$ est notée λf).

Proposition 4.

L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un sous-espace vectoriel de F^E .

Exemple 3

Posons

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y + z, z) \end{array} \quad \text{et} \quad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - y, 4x - z) \end{array} .$$

Déterminer $2u - 4v$.

• Remarques

1. Le vecteur nul $0_{\mathcal{L}(E,F)}$ de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ est l'application nulle de E dans F .

2. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

(a) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et tous $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(F, G)$, on a

$$(\lambda g_1 + \mu g_2) \circ f = \lambda g_1 \circ f + \mu g_2 \circ f,$$

(cela résulte directement de la définition des lois $+$ et $\cdot$ dans $\mathcal{L}(F, G)$). Autrement dit l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(F, G) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, G) \\ g & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

est une application linéaire.

(b) Soit $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et tous $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$, on a

$$g \circ (\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda g \circ f_1 + \mu g \circ f_2,$$

(on utilise pour cela la linéarité de g). Autrement dit l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, G) \\ f & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

est une application linéaire.

• En prenant $F = E$ dans la proposition précédente, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 5.

$(\mathcal{L}(E), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Exemple 4

Posons

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + y, y) \end{array} \quad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (y, x) \end{array} \quad f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 2y, 3x + 4y) \end{array} .$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est libre.

• **Remarque.** On peut toujours composer deux endomorphismes : si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $g \in \mathcal{L}(E)$, alors f et g sont des applications de E dans E , et la composée $g \circ f$, ainsi que la composée $f \circ g$, sont définies (c'est l'occasion de rappeler que, même dans ce cas, on a en général $g \circ f \neq f \circ g$). De plus, puisque f et g sont linéaires, $g \circ f$ et $f \circ g$ sont linéaires, et sont donc des endomorphismes de E .

Proposition 6.

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire de E dans F . Soit $g : F \longrightarrow G$ une application linéaire de F dans G .

L'application composée $g \circ f : E \longrightarrow G$ est une application linéaire de E dans G .

Proposition 7.

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et soient $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications linéaires. Alors les applications ψ_g et ϕ_f définies par

$$\psi_g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow & \mathcal{L}(E, G) \\ h & \mapsto & g \circ h \end{array} \right. \quad \phi_f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(F, G) & \rightarrow & \mathcal{L}(E, G) \\ h & \mapsto & h \circ f \end{array} \right.$$

sont linéaires.

• **Notations et vocabulaire.** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- D'après ce que l'on vient de dire, $f \circ f \in \mathcal{L}(E)$, $f \circ f \circ f \in \mathcal{L}(E)$, $f \circ f \circ f \circ f \in \mathcal{L}(E)$, etc. . .
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on notera

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} \in \mathcal{L}(E).$$

L'endomorphisme f^n s'appelle une **puissance** de l'endomorphisme f . On pose aussi $f^0 = \text{Id}_E$.

- Puisque $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel, on peut multiplier ces puissances de l'endomorphisme f par des scalaires, et aussi les additionner. Par exemple, $f^3 + 5f^2 - 2f + 4\text{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$. Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$, on a

$$\sum_{k=0}^n a_k f^k \in \mathcal{L}(E).$$

En posant $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on note

$$P(f) = \sum_{k=0}^n a_k f^k.$$

On dit que l'endomorphisme $P(f)$ est un polynôme de l'endomorphisme f .

Proposition 8.

Soient f et g deux endomorphismes de E qui **commutent**, (tels que $f \circ g = g \circ f$). Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{n-k} \circ g^k$$

$$f^n - g^n = (f - g) \sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k}.$$

1.3 Noyau et image d'une application linéaire

Soient $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Proposition-Définition 9.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. On pose

$$\ker(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}.$$

Alors $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E , qui est appelé le **noyau** de f .

2. On pose

$$\text{Im}(f) = \{f(x) \mid x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}.$$

Alors $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F , qui est appelé l'**image** de f .

Exemple 5

1. Déterminer $\ker(\text{Id}_E)$ et $\text{Im}(\text{Id}_E)$.
2. Notons $0_{\mathcal{L}(E,F)}$ l'application nulle de E dans F . Déterminer $\ker(0_{\mathcal{L}(E,F)})$ et $\text{Im}(0_{\mathcal{L}(E,F)})$.
3. Soit

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - y + z, -2x + 4y - 2z) \end{array} .$$

Déterminer une base de $\ker(u)$ et une base de $\text{Im}(u)$.

4. Soit

$$v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_5[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & (P(1), P(2)) \end{array} .$$

Déterminer une base de $\ker(v)$ et une base de $\text{Im}(v)$.

Proposition 10.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. f est injective;
2. $\ker(f) = \{0_E\}$.

Exemple 6

Vérifier que l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x + y, 2x + 2y, x - y)$ est injective.

Proposition 11.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. f est surjective;
2. $\text{Im}(f) = F$.

Corollaire 12.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes.

1. f est un isomorphisme;
2. $\ker(f) = \{0_E\}$ et $\text{Im}(f) = F$.

2 Isomorphismes

Soient $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

2.1 Réciproque et composée

Proposition 13.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ un isomorphisme. Alors l'application réciproque $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ est une application linéaire. C'est un isomorphisme de F dans E .

Proposition 14.

Soient deux isomorphismes $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors $g \circ f$ est un isomorphisme de E dans G .

2.2 Isomorphismes et dimension finie

Proposition 15.

On suppose ici que le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E est de dimension finie n et on considère $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_n)$ une base de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- f est injective ssi $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est libre.
- f est surjective ssi $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ engendre F .
- f est bijective ssi $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ est une base de F .

Corollaire 16.

Si deux espaces vectoriels sont isomorphes et que l'un des deux est de dimension finie alors ils sont tous les deux de dimension finie et de même dimension.

Proposition 17.

Supposons que E et F sont de **même dimension finie** et soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ alors on a les équivalences :

$$f \text{ est bijective} \iff f \text{ est injective} \iff f \text{ est surjective}$$

2.3 Espaces isomorphes

2.3.1 L'espace $\mathbb{K}^n$

Proposition 18.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Par définition d'une base pour tout vecteur x de E il existe un unique n -uplet $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

Pour tout $1 \leq i \leq n$, on définit l'application i -ième coordonnée $\phi_i : E \rightarrow \mathbb{K}$ par

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto x_i \end{aligned}$$

Cette application est une forme linéaire (application linéaire à valeur dans $\mathbb{K}$).

Démonstration : Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

Soient x et y deux éléments de E . Notons $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ les coordonnées de, respectivement x et y dans la base $\mathcal{B}$.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Par définition des coordonnées, on a l'égalité :

$$\lambda x + y = \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + y_i) e_i$$

Ainsi $(\lambda x_1 + y_1, \dots, \lambda x_n + y_n)$ sont les coordonnées du vecteur $\lambda x + y$ dans la base $\mathcal{B}$. On a donc bien, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

$$\phi_i(\lambda x + y) = \lambda x_i + y_i = \lambda \phi_i(x) + \phi_i(y)$$

Les applications ϕ_i sont donc bien linéaires. ■

Proposition 19.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E .

L'application ϕ définie par :

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\longmapsto (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Ainsi tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Démonstration : On démontre comme ci-dessus que l'application est linéaire. Montrons qu'elle est bijective. Comme il s'agit d'une application linéaire entre espaces vectoriels de même dimension (E est bien de dimension n puisqu'une de ces bases est de cardinal n), il suffit de démontrer que l'application est surjective.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Notons $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$. Alors, par définition des coordonnées d'un vecteur dans une base les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$ sont $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. C'est donc un antécédent de $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ par ϕ . ■

Exemple 7

1. Trouver un isomorphisme entre $\mathbb{R}^5$ et $\mathbb{R}_4[X]$.
2. Soit $V = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(2) = 0\}$. Trouver un isomorphisme entre $\mathbb{R}^3$ et V .

Proposition 20.

Supposons que E soit de dimension finie.

Un espace vectoriel est isomorphe à E si et seulement si F est de dimension finie et $\dim(F) = n$.

Démonstration : Nous avons déjà vu que si E et F sont isomorphe alors ils ont même dimension (corollaire 16).

Supposons maintenant que E et F soit de même dimension n alors d'après la proposition 19 il existe un isomorphisme ϕ_E et ϕ_F

$$\phi_E : E \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n \quad \text{et} \quad \phi_F : F \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n$$

D'après la proposition 14 l'application $\phi_F^{-1} \circ \phi_E$ est un isomorphisme de E dans F . Les espaces E et F sont donc isomorphes. ■

2.3.2 Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soient a, b et deux scalaires tels que $b \neq 0$.

Dans ce paragraphe on considère le sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

$$\mathcal{S}_{a,b} = \left\{ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0 \right\}$$

Lemme 21.

L'ensemble $\mathcal{S}_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
De plus l'application Ψ définie par :

$$\Psi : \begin{cases} \mathcal{S}_{a,b} & \longrightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{cases}$$

est un isomorphisme.

Démonstration : Montrons que $\mathcal{S}_{a,b}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Comme $0 + a0 + b0 = 0$ la suite nulle est un élément de $\mathcal{S}_{a,b}$, cet ensemble est donc non vide.

Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de $\mathcal{S}_{a,b}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. et considérons $w = \lambda u + v$. On a, par définition des opérations sur $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} w_{n+2} + aw_{n+1} + bw_n &= \lambda u_{n+2} + v_{n+2} + a\lambda u_{n+1} + av_{n+1} + b\lambda u_n + bv_n \\ &= \lambda(u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n) + v_{n+2} + av_{n+1} + bv_n \end{aligned}$$

Et comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites de $\mathcal{S}_{a,b}$ on a bien

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+2} + aw_{n+1} + bw_n = 0$$

Ainsi $\mathcal{S}_{a,b}$ est stable par combinaison linéaire.

L'ensemble $\mathcal{S}_{a,b}$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Montrons que l'application Ψ est linéaire.

Soient $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$, par définition des opérations sur les suites on a

$$(w_0, w_1) = (\lambda u_0 + v_0, \lambda u_1 + v_1) = \lambda(u_0, u_1) + (v_0, v_1)$$

On a donc bien

$$\Psi(\lambda u + v) = \lambda \Psi(u) + \Psi(v)$$

L'application Ψ est linéaire.

Notons que, pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ la relation

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$$

permet de définir par récurrence une unique suite vérifiant la relation et, $u_0 = a$ et $u_1 = b$. Cette propriété permet de définir l'application réciproque de Ψ et d'en déduire que Ψ est un isomorphisme. ■

Proposition 22.

Le sous-espace vectoriel $\mathcal{S}_{a,b}$ est de dimension 2.

Démonstration : D'après la proposition précédente les espaces $\mathcal{S}_{a,b}$ et $\mathbb{K}^2$ sont isomorphes ainsi ils sont de même dimension. On en déduit :

$$\dim \mathcal{S}_{a,b} = 2$$

Proposition 23 (Terme général d'une SRL2 dans le cas complexe).

Dans cette proposition on considère l'ensemble des suites complexes (ici $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)

- Si l'équation caractéristique a deux solutions distinctes r_1 et r_2 , alors le couple de suites géométriques (U_1, U_2) où $U_1 = (r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $U_2 = (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathcal{S}_{a,b}$. On a ainsi,

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}_{a,b} \quad \exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$$

- Si l'équation caractéristique a une unique solution r , alors le couple de suites (U_1, U_2) où $U_1 = (r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $U_2 = (nr^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathcal{S}_{a,b}$. On a ainsi

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}_{a,b} \quad \exists! (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \lambda r^n + \mu nr^n$$

Démonstration : D'après la proposition précédente comme $\mathcal{S}_{a,b}$ est de dimension 2, pour trouver une base de $\mathcal{S}_{a,b}$ il suffit de trouver une famille libre de deux éléments.

- Supposons que l'équation caractéristique de $\mathcal{S}_{a,b}$ admette deux solutions distinctes r_1 et r_2 et notons $U_1 = (r_1^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $U_2 = (r_2^n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Montrons tout d'abord que ces deux suites sont des éléments de $\mathcal{S}_{a,b}$. Soit $i \in \{1, 2\}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

Par définition de r_i on a :

$$r_i^2 + ar_i + br_i = 0$$

ainsi, en multipliant cette égalité par r_i^n

$$r_i^{n+2} + ar_i^{n+1} + br_i^n = 0$$

Les suites U_i sont donc bien des éléments de $\mathcal{S}_{a,b}$. Il reste maintenant à voir qu'elles forment une famille libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = 0$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n = 0$$

donc en particulier, pour $n = 0$ et $n = 1$:

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 &= 0 \end{cases}$$

Et comme $r_1 \neq r_2$ ce système est équivalent à $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$.

La famille est donc libre. On en déduit

La famille (U_1, U_2) est une base de $\mathcal{S}_{a,b}$

- Supposons maintenant que l'équation caractéristique admette une solution double r et notons $U_1 = (r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $U_2 = (nr^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Notons que comme $b \neq 0$ $r \neq 0$.

Nous avons déjà montré que U_1 était une suite de $\mathcal{S}_{a,b}$. Montrons que U_2 est une suite de $\mathcal{S}_{a,b}$, soit $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$(n+2)r^{n+2} + a(n+1)r^{n+1} + bnr^n = nr^n(r^2 + ar + b) + r^{n+1}(2r + a)$$

Mais r est solution de l'équation caractéristique donc

$$r^2 + ar + b = 0$$

Et comme r est solution double de l'équation caractéristique $r = -a/2$ ainsi

$$2r + a = 0$$

La suite U_2 est donc un élément de $\mathcal{S}_{a,b}$.

Montrons maintenant que les deux suites forment une base de $\mathcal{S}_{a,b}$. Pour cela il suffit de montrer que c'est une famille libre.

Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 = 0$$

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\lambda_1 r^n + \lambda_2 nr^n = 0$$

donc en particulier, pour $n = 0$ et $n = 1$:

$$\begin{cases} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_1 r + \lambda_2 r &= 0 \end{cases}$$

Et comme $r \neq 0$ ce système est équivalent à $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 0$. La famille est donc libre et on en déduit

La famille (U_1, U_2) est une base de $\mathcal{S}_{a,b}$

■

3 Modes de définition d'une application linéaire

3.1 Utilisation d'une base

Lemme 24.

Soit f et g deux éléments de $\mathcal{L}(E, F)$ où E est de dimension finie.

Si les applications f et g coïncident sur famille génératrice de E , alors elles sont égales.

Proposition 25.

Supposons que E soit de dimension finie et que $\dim(E) = n$.

Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E , $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de F , alors il existe une unique application linéaire $f : E \rightarrow F$ telle que

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad f(e_i) = v_i$$

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 26.

Si E et F sont de dimension finie alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F)$$

3.2 Utilisation d'espaces supplémentaires**Proposition 27.**

On considère deux espaces vectoriels $E = E_1 \oplus E_2$ et F .

Pour tout couple (f_1, f_2) d'applications linéaires

$$f_1 : E_1 \longrightarrow F, \quad f_2 : E_2 \longrightarrow F$$

Alors il existe une unique application linéaire $f : E \rightarrow F$ vérifiant :

$$\forall x_1 \in E_1 \quad \forall x_2 \in E_2 \quad f(x_1 + x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

4 Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel.**4.1 Identité, homothéties****Définition 28.**

Soit E un espace vectoriel. on appelle **homothétie** de rapport $\lambda \in \mathbb{K}$ l'application

$$f_\lambda : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ x & \longmapsto \lambda x \end{cases}$$

L'homothétie de rapport 1 n'est autre que l'identité de E , notée Id_E et l'homothétie de rapport λ est l'application λId_E .

Proposition 29.

Une homothétie est une application linéaire.

Exemple 8

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x \in E$, il existe $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x \cdot x$. Montrer que f est une homothétie.

4.2 Projecteurs

Définition 30.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E , **supplémentaires** dans E .

Pour tout $x \in E$, il existe un unique $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Posons $p(x) = x_1$. On définit ainsi une application

$$\begin{aligned} p : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto p(x) \end{aligned}$$

L'application p s'appelle la **projection** (ou : **projecteur**) sur E_1 parallèlement à E_2 .

Exemple 9

1. Dans $\mathbb{R}^2$, posons $E_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y = 0\}$, $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x = 0\}$, et $E_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$. Il est facile de vérifier que $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^2$ et $E_1 \oplus E_3 = \mathbb{R}^2$. Notons p_2 la projection sur E_1 parallèlement à E_2 et p_3 la projection sur E_1 parallèlement à E_3 . Déterminer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ l'expression de $p_2(x, y)$ et $p_3(x, y)$ en fonction de x, y .
2. Dans $\mathbb{R}^3$, posons $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + 2y + z = 0\}$ et $E_2 = \text{Vect}((1, 1, 1))$. On peut vérifier (exercice) que $E_1 \oplus E_2 = \mathbb{R}^3$. Notons p la projection sur E_1 parallèlement à E_2 , et q la projection sur E_2 parallèlement à E_1 . Déterminer, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ l'expression de $p(x, y, z)$ et $q(x, y, z)$ en fonction de x, y, z .

Proposition 31.

Avec les notations de la définition, on a les propriétés suivantes.

1. L'application p est linéaire (et donc, puisque $p : E \longrightarrow E$, on a $p \in \mathcal{L}(E)$).
2. $p^2 = p$
3. $\text{Im}(p) = E_1$
4. $\ker(p) = E_2$.

Définition 32.

Les endomorphismes f de E vérifiant $f \circ f = f$ sont appelés des projecteurs.

Proposition 33 (les projecteurs sont des projections).

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^2 = f$.

- Alors $\text{Im}(f) \oplus \ker(f) = E$,
- f est la projection sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\ker(f)$.

• Remarques

1. Dans cette proposition, on a supposé que f est linéaire.
Si on prend $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = |x|$, alors on a $f \circ f = f$, mais f n'a rien à voir avec une projection, car f n'est même pas linéaire !
2. Si f est un endomorphisme de E qui ne vérifie pas la relation $f^2 = f$, alors en général $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$ ne sont pas supplémentaires dans E (en général, la somme $\ker(f) + \text{Im}(f)$ n'est ni directe, ni égale à E).

Exemple 10

Soit

$$u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}z, \frac{1}{2}x + \frac{5}{4}y + \frac{3}{4}z, -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z \right).$$

Vérifier que u est un projecteur, et déterminer ses espaces caractéristiques.

4.3 Symétries

Définition 34.

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E , **supplémentaires** dans E .

Pour tout $x \in E$, il existe un unique $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = x_1 + x_2$. Posons $s(x) = x_1$. On définit ainsi une application :

$$p : E \longrightarrow E$$

$$x \longmapsto x_1 - x_2.$$

appelée **symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2** .

Proposition 35.

Une symétrie est un endomorphisme.

Proposition 36 (L'équation $s \circ s = Id_E$ caractérise les symétries).

Soit $E = E_1 \oplus E_2$. Soit s la symétrie par rapport à F_1 parallèlement à F_2 . Alors :

$$s \circ s = Id_E, \quad \ker(s - Id_E) = F_1, \quad \text{et} \quad \ker(s + Id_E) = F_2$$

Réciproquement, si s est un endomorphisme de E tel que $s \circ s = Id_E$, alors

1. $E = \ker(s - Id_E) \oplus \ker(s + Id_E)$,
2. s est la symétrie par rapport à $\ker(s - Id_E)$ parallèlement à $\ker(s + Id_E)$.

5 Rang d'une application linéaire

5.1 Définition

Définition 37.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

$\text{Im}(f)$ est de dimension finie, et on appelle **rang** de f la dimension de $\text{Im } f$:

$$\text{rg}(f) = \dim(\text{Im } f).$$

Exemple 11

Lien entre recherche de l'image et résolution d'un système linéaire : étude d'un exemple.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ définie par :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = (x + y - z, 2x + 4z, 2x + y + z, x + 2z).$$

1. Il est facile de donner une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.

2. Résoudre un système linéaire pour décrire $\text{Im}(f)$ grâce à des équations.
3. Trouver une base de $\text{Im}(f)$, et en déduire $\text{rg}(f)$.
4. Quel système linéaire faut-il résoudre pour déterminer $\ker(f)$? Trouver une base de $\ker(f)$, et en déduire $\dim(\ker f)$. Que vaut $\dim(\ker f) + \text{rg}(f)$?

Proposition 38.

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

$$\text{rg}(g \circ f) \leq \min(\text{rg}(f), \text{rg}(g))$$

Proposition 39.

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

- Si f est un isomorphisme, $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(g)$.
- Si g est un isomorphisme, $\text{rg}(g \circ f) = \text{rg}(f)$.

5.2 Formule du rang

Proposition 40.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit G un supplémentaire de $\ker f$ dans E . Alors la restriction de f à G définie par :

$$\begin{array}{ccc} f|_G: & G & \longrightarrow \text{Im } f \\ & x & \longmapsto f(x) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Théorème 41 (Formule du rang).

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors

$$\dim(\ker f) + \text{rg}(f) = \dim(E),$$

autrement dit : $\dim(\ker f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(E)$.

- **Exemple.** On considère l'application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_4[X], \mathbb{R}_3[X])$ définie par

$$\forall P \in \mathbb{R}_4[X], u(P) = P'' + 4P'.$$

1. Déterminer $\ker(u)$.
2. En déduire que pour tout $A \in \mathbb{R}_3[X]$, il existe $P \in \mathbb{R}_4[X]$ tel que $A = P'' + 4P'$.

6 Équations linéaires

Définition 42.

On appelle **équation linéaire** toute équation d'inconnue $x \in E$ de la forme $f(x) = b$ où

- $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.
- $b \in F$ appelé second membre de l'équation.

On appelle **équation homogène associée** à $f(x) = b$ l'équation $f(x) = 0_F$.

Proposition 43.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$.

1. L'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation $f(x) = 0_F$ est le noyau de f ($\ker f$).
2. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $f(x) = b$ est non vide si et seulement si $b \in \text{Im}(f)$ et, si x_0 est une solution particulière de $f(x) = b$, on a alors :

$$\mathcal{S} = x_0 + \ker(f)$$

- **Remarque.** Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est bijective l'équation linéaire $f(x) = b$ admet une unique solution.

Exemple 12

- Un système d'équations linéaires de n équations à p inconnues est une équation linéaire.
- Les droites, les plans de l'espace sont caractérisées par une équation linéaire.
- Toute équation différentielle linéaire d'ordre 1 peut être interprétée comme une équation linéaire.

7 Formes linéaires et hyperplans

- **Rappel.** Les éléments de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ sont appelés des formes linéaires (sur E).
- **Allure générale d'une forme linéaire**

Notons $n = \dim E$. Soit $(b_1, \dots, b_n)$ une base de E .

Soit $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$.

Notons, pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\alpha_i = f(b_i)$.

Soit $x \in E$. Il existe un unique $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$. Alors

$$f(x) = f(x_1 b_1 + \dots + x_n b_n) = x_1 f(b_1) + \dots + x_n f(b_n),$$

c'est à dire, avec nos notations,

$$f(x) = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n.$$

Exemple 13

1. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2) & \longmapsto & 2x_1 + 3x_2 \end{array}.$$

Alors f est une forme linéaire (non nulle) sur $\mathbb{R}^2$. Remarquons que $\ker(f)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ égal à la droite d'équation $2x_1 + 3x_2 = 0$. La dimension de $\ker(f)$ est $1 = (\dim \mathbb{R}^2) - 1$.

2. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & x_1 + 3x_2 - x_3 \end{array}.$$

Alors f est une forme linéaire (non nulle) sur $\mathbb{R}^3$. Remarquons que $\ker(f)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ égal au plan d'équation $x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$. La dimension de $\ker(f)$ est $2 = (\dim \mathbb{R}^3) - 1$.

3. Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (x_1, x_2, x_3) & \longmapsto & x_1 + 3x_2 - x_3 \end{array}.$$

Alors f est une forme linéaire (non nulle) sur $\mathbb{C}^3$. La dimension de $\ker(f)$ est $2 = (\dim \mathbb{C}^3) - 1$.

Proposition 44.

On suppose que E est de dimension finie non nulle.

1. Soit f une forme linéaire non nulle sur E (i.e. $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}$).
Alors $\ker(f)$ est un hyperplan de E .
2. Soit H un hyperplan de E .
Il existe une forme linéaire non nulle $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $H = \ker(f)$.
3. Soient f et g deux formes linéaires non nulles sur E . On a l'équivalence

$$\ker(f) = \ker(g) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, f = \lambda g).$$