Lycée Condorcet Mai 2025
PCSI

Intégration

Table des matières

1 Intégrale d'une fonction en escalier

1.1 Fonctions en escalier

Définition 1 (Subdivision).

Soient a et b deux réels avec $a < b$. Une **subdivision** de $[a, b]$ est une suite finie $\sigma = (a_0, \cdots, a_n)$ telle que :

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

Définition 2.

Soient a et b deux réels avec $a < b$ et $\sigma = (a_0, \cdots, a_n)$ une subdivision de $[a, b]$. On dit que σ est une subdivision à pas constant lorsqu'il existe $h \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $a_k - a_{k-1} = h$.
La valeur h est appelée **pas de la subdivision**.

Exemple 1

$(0, 2, 6)$ est une subdivision de $[0, 6]$.
$(0, 2, 4, 6)$ est une subdivision à pas constant de $[0, 6]$ de pas 2.

Définition 3 (Fonctions en escalier).

Soient a et b deux réels avec $a < b$ et $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que φ est une **fonction en escalier** sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \cdots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que φ est constante sur chaque intervalle $]a_{k-1}, a_k[$.
On note $\mathcal{E}([a, b])$ l'ensemble des fonctions en escalier définies sur l'intervalle $[a, b]$.

- **Remarques**
  1. Si une fonction est en escalier la subdivision n'est pas unique, il y en a une infinité !
  2. Une fonction $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction en escalier sur $[a, b]$ s'il existe une subdivision $a_0, \cdots, a_n$ de $[a, b]$ telle que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \exists \lambda_k \in \mathbb{R}, \forall x \in]a_{k-1}, a_k[, \varphi(x) = \lambda_k$$

Exemple 2

La fonction partie entière est une fonction en escalier sur n'importe quel intervalle $[a, b]$ de $\mathbb{R}$.

Proposition 4.

Soient φ et ψ deux fonctions en escalier sur l'intervalle $[a, b]$ et soient λ et μ un réel. Alors $| \varphi |$, $\lambda\varphi + \mu\psi$ et $\varphi \times \psi$ sont des fonctions en escaliers.

1.2 Intégration des fonctions en escalier.

Définition 5.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et φ une fonction en escalier sur $[a, b]$. En reprenant les notations de la remarques précédente, on définit **l'intégrale sur** $[a, b]$ **de** φ par :

$$\int_a^b \varphi(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (a_k - a_{k-1})$$

- **Remarques**

1. L'intégrale ne dépend pas des valeurs de f aux points de la subdivision.
2. Cette définition est consistante car le réel $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(a_k - a_{k-1})$ ne dépend pas de la subdivision choise. En effet :
   — *L'intégrale est invariante si on ajoute un nombre fini de points à* $\sigma = (a_0, \cdots, a_n)$. Il suffit de le montrer pour l'ajout d'un point. Si $\sigma' = (x_0, \cdots, x_{m-1}, y, x_m, \cdots, x_n)$ alors :
   $$\lambda_1(x_1 - x_0) + \cdots + \lambda_{m-1}(y - x_{m-1}) + \lambda_{m-1}(x_m - y) + \cdots + \lambda_n(x_n - x_{n-1})$$
   est égal à
   $$\lambda_1(x_1 - x_0) + \cdots + \lambda_{m-1}(x_m - x_{m-1}) + \cdots + \lambda_n(x_n - x_{n-1})$$
   — *L'intégrale ne dépend pas de la subdivision choisie.*
   Soient σ et σ' deux subdivision adaptées à φ. D'après ce qui précède, le calcul de $\int_{[a,b]} \varphi$ conduit au même résultat sur les subdivision σ, $\sigma \cup \sigma'$ et donc sur σ'.
3. Dans cette formule, la quantité $\lambda_k(a_k - a_{k-1})$ est l'aire d'un rectangle élémentaire de hauteur λ_k. Cette aire est comptée positivement si $\lambda_k \geq 0$ et négativement sinon. Donc $\int_a^b \varphi(t)\, dt$ correspond à l'aire algébrique de la région délimitée par le graphe φ et l'axe des abscisses.

Proposition 6.

Soient a, b et c trois réels tels que $a < c < b$, φ et ψ deux fonctions en escalier et $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. Linéarité de l'intégrale :
$$\int_a^b \lambda\varphi + \mu\psi = \lambda \int_a^b \varphi + \mu \int_a^b \psi$$
2. Relation de Chasles
$$\int_a^b \varphi = \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi$$
3. Positivité : si $\varphi \geq 0$
$$\int_a^b \varphi \geq 0$$
4. Croissance : si $\varphi \leq \psi$
$$\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi$$

Démonstration : 1. Soit $\sigma = (a_0, \cdots, a_n)$ une subdivision adaptée aux deux fonctions (qui s'obtient par exemple en mettant en commun les points d'une subdivision adaptée à φ et d'une subdivision adaptée à ψ). Alors :

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi) &= \sum_{k=1}^{n} (\lambda\varphi + \mu\psi)\left(\frac{a_{k-1} + a_k}{2}\right)(a_k - a_{k-1}) \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{a_{k-1} + a_k}{2}\right)(a_k - a_{k-1}) + \mu \sum_{k=1}^{n} \psi\left(\frac{a_{k-1} + a_k}{2}\right)(a_k - a_{k-1})\end{aligned}$$

On a donc bien
$$\int_a^b (\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda \int_a^b \varphi + \mu \int_a^b \psi$$

2. Tout d'abord si φ est en escalier la restriction de φ aux intervalles $[a, b]$ et $[b, c]$ sont aussi en enscalier.
Soit σ' une subdivision adaptée à φ et soit $\sigma = \sigma' \cup \{c\}$ la subdivision qu'on écrit $(a_0, \cdots a_n)$. Et soit $p \in [\![0, n]\!]$ tel que $a_p = c$ alor $(a_0, \cdots, a_p)$ est une subdivision adaptée à la restricition de φ à $[a, c]$ de même pour $(a_p, \cdots, a_n)$ avec $\varphi\mid_{[c,b]}$.
Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\varphi\mid_{]a_i, a_{i+1}[}$ est constante égale à λ_i. On a alors :
$$\int_a^b \varphi = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(a_i - a_{i-1}) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i(a_i - a_{i-1}) + \sum_{i=p+1}^{n} \lambda_i(a_i - a_{i-1}) = \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi$$
3. Comme φ est supposée positive alors avec les notations du (2) pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\lambda_i \geq 0$, par suite l'intégrale est positive.
4. Il suffit d'appliquer (3) à la fonction $\psi - \varphi$ et d'utiliser la linéarité de l'intégrale. ∎

1.3 Approximation des fonction continues par des fonctions en escalier

Théorème 7.

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varepsilon > 0$. Alors il existe une fonction en escalier $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [a, b]$

$$|f(x) - \theta(x)| \leq \varepsilon$$

La démonstration de ce théorème est admise.

Proposition 8.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux fonctions en escalier φ et ψ telles que

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad 0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon$$

2 Intégrale des fonctions continues sur un segment

2.1 Construction

Théorème 9.

Soient a et b deux réels avec $a < b$ et une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.
Les ensembles

$$A = \left\{ \int_a^b \varphi(t)\ \mathrm{d}t, \varphi \in \mathcal{E}([a, b]), \varphi \leq f \right\} \quad \text{et} \quad B = \left\{ \int_a^b \psi(t)\ \mathrm{d}t, \psi \in \mathcal{E}([a, b]), \psi \geq f \right\}$$

sont des parties de $\mathbb{R}$ qui admettent respectivement une borne supérieure et une borne inférieure, égales entre elles.

La démonstration est admise.

Définition 10.

Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle **intégrale de f sur** $[a, b]$ le nombre réel noté $\int_a^b f$ défini par :

$$\int_a^b f = \sup A = \inf B$$

- **Remarques.**
  1. Dans le cas d'une fonction en escalier, cette définition coïncide avec celle donnée précédemment.
  2. Cette définition permet de conserver la notion d'intégrale définie comme aire sous la courbe.

Définition 11.

Soient I un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $(a, b) \in I^2$ tels que $a < b$. On définit :

$$\int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

- **Remarque.** L'aire est alors comptée négativement.

Définition 12 (Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.)**.**

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction réelle continue sur $[a, b]$. On définit la **valeur moyenne** sur $[a, b]$ par la valeur $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$.

- **Remarque :** La valeur moyenne est la constante μ qui vérifie $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \mu$.
- **Remarque.** Cette notion généralise celle de la moyenne sur un nombre fini de réels.

2.2 Propriétés des intégrales de fonctions continues

Proposition 13 (Linéarité)**.**

Soient f et g deux fonction continues sur un intervalle I, $(a, b) \in I^2$ et $(\lambda, \nu) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Proposition 14.

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continues et $c \in [a, b]$.

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Proposition 15.

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur un intervalles I et a, $b \in I$.

1. $f \geq 0$ et $a \leq b \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq 0$.
2. $f \leq g$ et $a \leq b \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x$
3. $a \leq b \Rightarrow \displaystyle\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$
4. Si $a \leq b$ et $m \leq f \leq M$ entre a et b, alors $m(b-a) \leq \displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq M(b-a)$.

Démonstration :

1. Puisque $f \geq 0$, alors $\varphi = 0$ est une fonction en escalier telle que $\varphi \leq f$. Par définition de l'intégrale de f sur $[a, b]$, on en déduit que

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq \int_a^b \varphi(x)\ \mathrm{d}x = 0$$

2. On applique la point précédent à la fonction $h = g - f \geq 0$ et par linéarité on obtient :

$$\int_a^b h(x)\ \mathrm{d}x \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

3. On a pour tout $x \in [a, b]$, $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. D'où par croissance et linéarité de l'intégrale :

$$-\int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x$$

Ainsi on obtient : $\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\ \mathrm{d}x.$ ■

Exemple 3

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\ \mathrm{d}x \leq \frac{1}{n+1}$$

En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\ \mathrm{d}x$ quand n tend vers l'infini.

Proposition 16 (Stricte positivité).

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle I et $(a,b) \in I^2$ tel que $a < b$. Si f est non nulle alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

Démonstration : Si f est non nulle sur $[a,b]$ alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) > 0$. D'après la définition de la continuité de f en c et avec $\varepsilon = \frac{f(c)}{2}$:

$$\exists a \leq \alpha \leq \beta \leq b, \quad \forall x \in [a,b], \quad x \in [\alpha,\beta] \Rightarrow |f(x) - f(c)| \leq \varepsilon.$$

Ainsi pour tout $x \in [\alpha,\beta]$ on a $f(c) \leq \frac{f(c)}{2}$. En prenant l'intégrale, on en déduit donc que

$$\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \geq \int_\alpha^\beta f(x)\ \mathrm{d}x \geq \int_\alpha^\beta \varepsilon\ \mathrm{d}x = (\beta-\alpha)\varepsilon > 0$$ ■

Proposition 17.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive.

Alors $\displaystyle\int_a^b f = 0$ si et seulement si f est nulle sur $[a,b]$.

Démonstration : Si f est nulle son intégrale est nulle.
La réciproque est la contraposée de la proposition précédente. ■

• **Remarque.** Si f n'est pas supposée continue le résultat est faux : Par exemple $f(x) = 0$ sur $]0,1[$ et $f(0) = f(1) = 1$ est positive, non nulle mais $\int_0^1 f = 0$.

2.3 Passage à la limite et développement asymptotique

Les signes $\int$ et lim ne commutent pas !
Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions continues sur un intervalle $[a,b]$, on a, en général

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\ \mathrm{d}t \neq \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t$$

Même si les limites existent ! Pour calculer le premier terme on calcule directement l'intégrale puis on calcule la limite !

Exemple 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f_n(0) = 0$, $f_n(t) = n$ si $t \in]0, \frac{1}{n}]$ et $f_n(t) = 0$ si $t > \frac{1}{n}$.

1. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 f_n(t)\ \mathrm{d}t$. Que peut-on en déduire concernant $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(t)\ \mathrm{d}t$?
2. Soit $t \in [0,1]$. Justifier l'existence de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(t)$ et calculer cette limite. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} f_n(t)\ \mathrm{d}t$.

Exemple 5

Montrer que $\displaystyle\int_x^{x+1} e^t \ln(t)\ \mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} e^x(e-1)\ln(x)$

3 Calcul intégral

Définition 18.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction.
On dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{K}$ est une **primitive** de f sur I si elle est dérivable sur I et si :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$$

Exemples
L'application $x \mapsto x^2$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de l'application $x \mapsto 2x$. De même l'application $x \mapsto x^2 + 18$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la même application.

Proposition 19.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{K}$ une application alors :

- si F et G sont deux primitives de f il existe $c \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall x \in I, \quad F(x) = G(x) + c$$

- Si F est une primitive de f sur I l'ensemble $\mathcal{P}_f$ des primitives de f sur I est :

$$\mathcal{P}_f = \{F + c, \quad c \in \mathbb{K}\}$$

Corollaire 20.

Soit f une fonction définie sur I admettant une primitive sur I, soit $a \in I$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(a) = \alpha$.

Théorème 21 (Théorème fondamental de l'analyse)**.**

Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si x_0 est un élément de I, alors la fonction :

$$F : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t \end{array}$$

est une primitive de f. Plus particulièrement c'est la primitive de f qui s'annule en x_0.

Démonstration : La fonction F est définie pour tout $x \in I$ car f est continue sur $[x_0, x]$ ou $[x, x_0]$ (selon que $x \leq x_0$ ou $x \geq x_0$).
Soit $y_0 \in I$, montrons que F est dérivable et que $F'(y_0) = f(y_0)$.
Soit $\varepsilon > 0$.
Soit $x \in I \backslash \{y_0\}$ supposons que $y_0 < x$:

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(y_0)}{x - y_0} - f(y_0) &= \frac{1}{x - y_0} \int_{y_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t - f(y_0) \\ &= \frac{1}{x - y_0} \int_{y_0}^{x} f(t) - f(y_0)\ \mathrm{d}t \end{aligned}$$

D'où, avec l'inégalité triangulaire (on a supposé que $x \geq y_0$) :

$$\left| \frac{F(x) - F(y_0)}{x - y_0} - f(y_0) \right| \leq \frac{1}{x - y_0} \int_{y_0}^{x} |f(t) - f(y_0)|\ \mathrm{d}t$$

Or f est continue en y_0, donc :

$$\exists \alpha > 0, \forall t \in I, |t - y_0| \leq \alpha \Rightarrow |f(t) - f(y_0)| \leq \varepsilon$$

Alors pour tout $x \in I\backslash\{y_0\}$, $|x-y_0| \leq \alpha$, on a, pour tout $t \in [y_0, x]$, $|f(x)-f(y_0)| \leq \varepsilon$ et en reportant :

$$\left|\frac{F(x)-F(y_0)}{x-y_0} - f(y_0)\right| \leq \frac{1}{x-y_0}\int_{y_0}^{x} \varepsilon \ \mathrm{d}t$$

On a donc :

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0)\right| \leq \varepsilon$$

Si $x < y_0$ la démonstration est similaire après avoir remarqué que

$$\frac{F(x)-F(y_0)}{x-y_0} - f(y_0) \quad = \quad \frac{1}{y_0-x}\int_{x}^{y_0} f(t)-f(y_0) \ \mathrm{d}t$$

On a ainsi montré que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = f(x_0)$.
La fonction F est donc dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$. Puisque c'est vrai pour tout $x_0 \in I$ et que f est continue, on en déduit finalement que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $F' = f$.

■

Corollaire 22.

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.

Théorème 23.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ et F une primitive de f sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(t) \ \mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

L'élément $F(b) - F(a)$ est noté $[F(x)]_a^b$ et appelé **variation de F de a à b**.

Proposition 24.

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$. On a

$$\int_a^b u'(t)v(t) \ \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) \ \mathrm{d}t.$$

Proposition 25.

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ d'interieurs non vides, f une fonction continue sur I à valeurs dans $\mathbb{R}$ et φ une donction de classe $\mathcal{C}^1$ de J dans I. Alors :

$$\forall(\alpha, \beta) \in J^2, \quad \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u) \ \mathrm{d}u = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t) \ \mathrm{d}t.$$

Proposition 26.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une fonction continue.

1. si f est périodique de période T, alors pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$:
$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\ \mathrm{d}t, \qquad \int_a^{a+T} f(t)\ \mathrm{d}t = \int_b^{b+T} f(t)\ \mathrm{d}t$$
2. si f est une fonction paire, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ \mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\ \mathrm{d}t$
3. si f est une fonction impaire, alors pour tout $a \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\ \mathrm{d}t = 0.$

4 Formules de Taylor

4.1 Taylor-Young

Proposition 27 (Formule de Taylor-Young)**.**

Soit $a \in I$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^n sur I. Alors pour $x \in I$,
$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big).$$

Démonstration : Démontrons ce résultat par récurrence.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathrm{Pr}(n)$ l'assertion :
$$\text{"Si } f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})\text{, alors } f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big)\text{"}$$

Initialisation
Soit f une fonction continue. On a alors par définition
$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + o(1) \underset{x\to a}{=} \frac{(x-a)^0}{0!} f^{(0)}(a) + o((x-a)^0)$$
Ainsi $\mathrm{Pr}(0)$ est vraie.
Hérédité
Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons $\mathrm{Pr}(n)$ vraie.
Soit $f \in \mathcal{C}n+1(I,\mathbb{R})$. Par définition f est dérivable et $f' \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$. On peut ainsi appliquer l'hypothèse de récurrence à f' on a ainsi :
$$f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k+1)}(a) + o((x-a)^n)$$
Ce qui donne en primitivant :
$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(a) + o((x-a)^{n+1}) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o((x-a)^{n+1})$$
Ainsi si $\mathrm{Pr}(n)$ est vraie alors $\mathrm{Pr}(n+1)$ est vraie.

Le principe de récurrence permet ainsi de conclure que la formule de Taylor-Young est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. ■

4.2 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 28.

Pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, on a l'égalité :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \text{ d}t.$$

Démonstration : On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\text{Pr}(n)$:

$$\text{« Pour toute } f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b], \mathbb{K})\text{, on a } f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \text{ d}t \text{ »}$$

- Si f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a :

$$\sum_{k=0}^{0} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^0}{0!} f'(t) \text{ d}t = f(a) + \int_a^b f'(t) \text{ d}t = f(a) + (f(b) - f(a)) = f(b)$$

Ainsi $\text{Pr}(0)$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\text{Pr}(n)$ vraie.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}([a,b], \mathbb{K})$. En particulier, $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b], \mathbb{K})$.
Par hypothèse de récurrence, on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \text{ d}t$$

De plus les fonctions $f^{(n+1)}$ et $t \mapsto -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ étant $\mathcal{C}^1$ sur I, on a, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \text{ d}t &= \left[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t) \right]_a^b - \int_a^b -\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) \text{ d}t \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) \text{ d}t. \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que

$$\begin{aligned} f(b) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) \text{ d}t \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (b-a)^k + \int_a^x \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t) \text{ d}t \end{aligned}$$

On a donc montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $\text{Pr}(n)$ est vraie alors $\text{Pr}(n+1)$ est vraie.
Le principe de récurrence permet ansi de conclure. ■

Exemple 6

Montrer que, pour tout $x \in [0, \pi/2]$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.

Proposition 29.

Pour toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, on a l'inégalité :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}$$

où $M_{n+1} = \sup_{[a,b]} |f^{(n+1)}|$.

Démonstration : On majore le reste de la formule de Taylor par l'inégalité triangulaire :

$$\left| \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \text{ d}t \right| \leq \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} |f^{(n+1)}(t)| \text{ d}t \leq M_{n+1} \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \text{ d}t = M_{n+1} = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$ ■

5 Sommes de Riemann

Définition 30.

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On définit les deux suites $(S_n)_{n\geq 1}$ et $(T_n)_{n\geq 1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par :

$$S_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(a_k)\quad\text{et}\quad T_n=\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f(a_k)$$

où les $(a_k)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est la subdivision de $[a,b]$ de pas $\dfrac{b-a}{n}$. autrement dit, pour tout $k\in[\![0,n]\!]$ on a

$$a_k=a+k\frac{b-a}{n}$$

Les suites S_n et T_n sont appelées les **sommes de Riemann** associées à la fonction f.

- **Remarques**. Ces sommes sont les intégrales des fonctions en escalier φ et ψ quivalent respectivement $f(a_k)$ et $f(a_{k+1})$ sur $]a_k,a_{k+1}[$.

Proposition 31.

Si f est une fonction continue sur $[a,b]$. Les sommes de Riemann $(S_n)_{n\geq 0}$ et $(T_n)_{n\geq 1}$ convergent vers :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Démonstration : On fait la démonstration pour $(S_n)_{n\geq 0}$ et dans le cas où f est lipschitzienne (ce qui est en particulier le cas si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$). Nontons K la constante de lispschitz associée à f sur $[a,b]$.
Soit $n\in\mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x-S_n\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}f(x)\ \mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}f(a_k)\right| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}f(x)-f(a_k)\ \mathrm{d}x\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}}f(x)-f(a_k)\ \mathrm{d}x\right| && \text{par inégalité triangulaire} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}|f(x)-f(a_k)|\ \mathrm{d}x && \text{par inégalité triangulaire (celle des intégrales)} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}K|x-a_k|\ \mathrm{d}x && \text{car } f \text{ est } K\text{-lipschitzienne} \\
&\leq K\sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}}a_{k+1}-a_k\ \mathrm{d}x \\
&\leq K\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)^2 \\
&\leq K\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^2}{n^2} \\
&\leq K\frac{(b-a)^2}{n}
\end{aligned}$$

Comme enfin $\lim\limits_{n\to+\infty}K\dfrac{(b-a)^2}{n}=0$, on obtient par théorème d'encadrement

$$\lim_{n\to+\infty}S_n=\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$$

■

- **Remarques**
  1. On reconnait la méthode des rectangles. En particulier, ce résultat signifie qu'une somme de Riemann constitue une bonne approximation de l'intégrale pourvu que le pas soit petit.
  2. La vitesse de convergnece de la somme de Riemann vers l'intégrale est en $\frac{1}{n}$. On peut améliorer la précision en utilisant la méthode des trapèze. On approche alors $\int_a^b f$ par

  $$R_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(a_k) + f(a_{k+1})}{2}$$

  On obtient alors une approximation en $\frac{1}{n^2}$.

Exemple 7

Montrer que les suites de terne générale :

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2}, \qquad S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+n}, \qquad T_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

convergent. Et calculer leur limite.

6 Intégrale des fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{C}$

Définition 32.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue.
On appelle **intégrale de f sur** $[a,b]$ le nombre complexe défini par :

$$\int_a^b f = \int_a^b Re(f) + i \int_a^b Im(f)$$

Proposition 33.

Soit $f,\, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue, $c \in [a,b]$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$.

1. Linéarité : $\displaystyle\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$.
2. Relation de Chasles si $a < c < b$ $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
3. $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \in_a^b |f|$.

- **Remarque** Les propriétés liées à l'ordre n'ont plus de sens dans le cas complexe.