$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. ***Preuve de Matsuoka.***

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on définit

$$I_p = \int_0^{\pi/2} \cos^{2p}(t)\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J_p = \int_0^{\pi/2} t^2 \cos^{2p}(t)\mathrm{d}t.$$

On note que $(I_p)_{p\geq 0}$ est extraite de la suite des intégrales de Wallis (termes pairs).

1. (a) Établir, pour p entier naturel l'égalité $I_{p+1} = \dfrac{2p+1}{2p+2} I_p$.
   (b) Déduire de ce qui précède que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_p > 0$.
   Donner une deuxième preuve en vous appuyant *précisément* sur une propriété du cours d'intégration.
2. (a) Donner le graphe de la fonction sin sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, sur lequel on fera figurer la tangente en 0, et surtout la corde entre les points d'abscisses 0 et $\pi/2$. En déduire graphiquement l'inégalité

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad t \leq \frac{\pi}{2}\sin(t).$$

   Établir ceci soigneusement en étudiant la fonction $u : t \mapsto \frac{\pi}{2}\sin(t) - t$.
   (b) Montrer pour $p \in \mathbb{N}$ l'inégalité

$$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}\left(I_p - I_{p+1}\right).$$

   (c) Démontrer que le quotient $\dfrac{J_p}{I_p}$ tend vers 0.
3. (a) Soit $p \geq 1$. En intégrant par parties deux fois I_p, l'exprimer à l'aide de J_{p-1} et J_p.
   (b) En déduire que pour tout $p \geq 1$, $\dfrac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \dfrac{J_p}{I_p} = \dfrac{1}{2p^2}$.
   (c) En sommant, en déduire la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$.
   (d) Une somme associée : que vaut $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2}$?

Corrigé

1. (a) Il s'agit ici de faire l'intégration par parties habituelle pour les intégrales de Wallis. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
I_{p+1} &= \int_0^{\pi/2} \cos^{2p+2}(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2} \cos(t)\cos^{2p+1}(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[\sin t \cos^{2p+1}(t)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \sin(t)(2p+1)(-\sin t)\cos^{2p}(t)\mathrm{d}t \\
&= 0 + (2p+1)\int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^2(t)}_{1-\cos^2(t)} \cos^{2p}(t)\mathrm{d}t \\
&= (2p+1)I_p - (2p+1)I_{p+1},
\end{aligned}$$

   ce qui conduit bien à l'égalité $I_{p+1} = \dfrac{2p+1}{2p+2} I_p$.
   (b) On peut constater que $I_0 = \frac{\pi}{2} \neq 0$. Il est alors facile de démontrer par récurrence (en utilisant la relation obtenue au-dessus) que pour tout p, $I_p > 0$. Alternativement, pour p donné, I_p est définie comme l'intégrale d'une fonction continue, positive et non nulle sur le segment $[0, \frac{\pi}{2}]$. La propriété de stricte positivité de l'intégrale amène alors que $I_p > 0$.

2. (a) La fonction $u : t \mapsto \frac{\pi}{2}\sin(t) - t$ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, de dérivée $u'(t) = \frac{\pi}{2}\cos(t) - 1$. Celle-ci est, comme cos, strictement décroissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Or, $u'(0) = \frac{\pi}{2} - 1$ et $u'(\frac{\pi}{2}) = -1 < 0$. Il existe un unique $\alpha \in [0, \pi/2]$ tel que $u'(\alpha) = 0$ (en toute rigueur, il faudrait appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à u' continue). Voici, donc, le tableau de variations de u.

x	0		α		$\frac{\pi}{2}$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
u	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

Il permet bel et bien d'établir que u est positive sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ ce qui revient à montrer l'inégalité demandée.

(b) Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède, on a

$$\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad t^2 \cos^{2p}(t) \leq \left(\frac{\pi}{2}\sin(t)\right)^2 \cos^{2p}(t) = \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \cos^2(t)\right)\cos^{2p}(t).$$

Par croissance de l'intégrale

$$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p}(t)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p+2}(t)\mathrm{d}t\right) = \frac{\pi^2}{4}(I_p - I_{p+1}).$$

(c) En utilisant la relation démontrée en 1.(a), on obtient que pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq J_p \leq \frac{\pi^2}{4}\left(1 - \frac{2p+1}{2p+2}\right) I_p.$$

D'après la question 1.(b), $I_p > 0$, de sorte que l'on peut diviser par I_p en conservant l'inégalité :

$$0 \leq \frac{J_p}{I_p} \leq \frac{\pi^2}{4(2p+1)}.$$

Par encadrement, on a bien $\frac{J_p}{I_p} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

3. (a) Soit $p \geq 1$. Les fonctions mises en jeu dans l'intégration par parties ci-dessous sont de classe $\mathcal{C}^1$.

$$\begin{aligned}
I_p &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \cos^{2p}(t)\mathrm{d}t \\
&= \left[t\cos^{2p}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cdot (2p)(-\sin(t))\cos^{2p-1}(t)\mathrm{d}t \\
&= 0 + 2p\left(\left[\frac{t^2}{2}\sin(t)\cos^{2p-1}(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t^2}{2}\left(\sin(t)\cos^{2p-1}(t)\right)' \mathrm{d}t\right) \\
&= -p\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \left(\cos(t)\cos^{2p-1}(t) - \underbrace{\sin^2(t)}_{1-\cos^2(t)}(2p-1)\cos^{2p-2}(t)\right)\mathrm{d}t \\
&= -p\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + (2p-1))\, t^2\cos^{2p}(t)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2p-1)\, t^2\cos^{2p-2}(t)\mathrm{d}t\right) \\
&= p\left((2p-1)J_{p-1} - 2pJ_p\right).
\end{aligned}$$

(b) En divisant par I_p dans la relation précédente, on obtient

$$1 = p\left((2p-1)\frac{J_{p-1}}{I_p} - 2p\frac{J_p}{I_p}\right).$$

D'après la relation montrée en 1.(a), $I_p = \frac{2p-1}{2p}I_{p-1}$, d'où

$$1 = p\left(\cancel{(2p-1)}\frac{2p}{\cancel{2p-1}}\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - 2p\frac{J_p}{I_p}\right),$$

ce qui donne bien $\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} = \frac{1}{2p^2}$.

(c) L'expression proposée ci-dessus est télescopique. Sommons :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{2p^2} = \sum_{p=1}^{n} \left(\frac{J_{p-1}}{I_{p-1}} - \frac{J_p}{I_p} \right) = \frac{J_0}{I_0} - \frac{J_n}{I_n}.$$

On a démontré en question 2. (c) que $\frac{J_n}{I_n}$ tendait vers 0. Ceci prouve l'existence de la limite ci-dessous :

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = 2\frac{J_0}{I_0}.$$

Il reste à faire le calcul des intégrales I_0 et J_0 :

$$I_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad J_0 = \left[\frac{t^2}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^3}{24}.$$

On trouve bien $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} = 2 \cdot \frac{\pi^3}{24} \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{\pi^2}{6}$.

(d) Il s'agit ici de séparer les termes pairs des termes impairs. On se donne un entier naturel n :

$$\sum_{p=1}^{2n+1} \frac{1}{p^2} = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2}.$$

Ainsi,

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{(2p+1)^2} = \sum_{p=1}^{2n+1} \frac{1}{p^2} - \frac{1}{4} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$