Problème 2 : Commutant d'un endomorphisme cyclique

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit qu'un vecteur a de E est **cyclique** pour u si

$$(a, u(a), u^2(a), \ldots, u^{n-1}(a)) \text{ est une base de } E.$$

On appelle alors cette base *cycle* de a. L'endomorphisme u est dit **cyclique** si il existe un vecteur cyclique pour u.

Partie A. Exemples.

1. Dans cette question, $E = \mathbb{R}_p[X]$ avec $p = n-1$, et $u : P \mapsto P'$ est l'endomorphisme de dérivation. Montrer que X^p est cyclique.
2. Prouver que si u est cyclique, alors $\mathrm{rg}(u) \geq n-1$.
   L'endomorphisme nul est-il cyclique ?

Partie B. Commutant d'un endomorphisme.

Dans cette partie, il n'est pas fait d'hypothèses sur u. Rappelons que $\mathscr{L}(E)$, muni de l'addition des applications linéaires et de leur multiplication par un scalaire, est un espace vectoriel de dimension n^2. On appelle **commutant** de l'endomorphisme u l'ensemble

$$\mathcal{C}(u) = \{v \in \mathscr{L}(E) : v \circ u = u \circ v\}.$$

1. Prouver que $\mathcal{C}(u)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$.
2. Prouver l'inclusion $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{n-1}) \subset \mathcal{C}(u)$.

Partie C. Commutant d'un endomorphisme cyclique.

Dans cette partie, on suppose que u est cyclique et que a est un vecteur cyclique pour u. Soit $v \in \mathcal{C}(u)$. On décompose $v(a)$ sur le cycle de a :

$$\exists!(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{K}^n : v(a) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(a).$$

1. Prouver que $v = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j$ en prouvant que ces applications coïncident sur une base. Quelle inclusion vient-on d'établir ?
2. Calculer $\dim(\mathcal{C}(u))$.

Corrigé

Partie A. Exemples.

1. On a
   $$u(X^p) = pX^{p-1}, \quad u^2(X^p) = p(p-1)X^{p-2}, \quad \ldots, u^{n-1}(X^p) = (X^p)^{(p)} = p!X^0.$$
   On a donc que $\left(X^p, u(X^p), \ldots, u^{n-1}(X^p)\right.$ est une famille de polynômes non nuls de degrés échelonnés. Elle est donc libre. De plus, son cardinal n est égal à $p+1 = \dim \mathbb{R}_p[X]$. C'est donc une base de $\mathbb{R}_p[X]$ ce qui prouve que X^p est bien cyclique pour u.

2. Par, définition, si u est cyclique alors il existe $a \in E$ tel que
   $$(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a))$$
   La famille $(u(a), \ldots, u^{n-1}(a))$ est libre comme sous-famille d'une famille libre et tous ses vecteurs sont dans $\mathrm{Im}(u)$: ceci oblige $\mathrm{Im}(u)$ à être de dimension au moins $n-1$: $\mathrm{rg}(u) \geq n-1$.
   L'endomorphisme nul est a une image de dimension 0. S'il est cyclique, on vient de montrer que $0 \geq n-1$, c'est-à-dire $n \leq 1$. L'endomorphisme nul n'est donc pas cyclique dès que la dimension de l'espace excède 2. En revanche, si $n = 1$, alors pour $a \neq 0_E$, (a) est un cycle pour l'endomorphisme nul.

Partie B. Commutant d'un endomorphisme.

1. L'endomorphisme nul commute avec u. De plus, si on prend deux endomorphismes v et w qui commutent avec u, et deux scalaires $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a

$$u \circ (\lambda v + \mu w) = \lambda u \circ v + \mu u \circ w = \lambda v \circ u + \mu w \circ u = (\lambda v + \mu w) \circ u,$$

ce qui montre que $\mathcal{C}(u)$ est stable par combinaison linéaire.

2. Soit $0 \leq k \leq n-1$. On a $u^k \circ u = u^{k+1} = u \circ u^k$ (u commute avec tous ses itérés). Ainsi,

$$\mathrm{Id}_E, u, u^2, \ldots u^{n-1} \text{ appartiennent à } \mathcal{C}(u).$$

Or, $\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{n-1})$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$ au sens de l'inclusion qui contienne $\mathrm{Id}_E, u, u^2, \ldots u^{n-1}$. On en déduit

$$\mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{n-1}) \subset \mathcal{C}(u).$$

Partie C. Commutant d'un endomorphisme cyclique.

1. On va prouver l'égalité de ces applications sur la base $(a, u(a), u^2(a), \ldots, u^{n-1}(a))$. Soit $0 \leq k \leq n-1$.

$$\begin{aligned} v(u^k(a)) = u^k(v(a)) &= u^k\left(\sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(a)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^k(u^j(a)) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j(u^k(a)). \end{aligned}$$

Les endomorphismes v et $\sum\limits_{j=0}^{n-1} \alpha_j u^j$ sont égaux sur une base donc égaux. On vient d'établir l'inclusion

$$\mathcal{C}(u) \subset \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{n-1}).$$

2. Combinons le résultat de la dernière question avec celui de la partie B : on obtient

$$\mathcal{C}(u) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{n-1}).$$

La famille $(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{n-1})$ engendre donc $\mathcal{C}(u)$. Montrons qu'elle est libre. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in \mathbb{K}$. Supposons que

$$\lambda_0 \mathrm{Id}_E + \lambda_1 u + \ldots + \lambda_{n-1} u^{n-1} = 0_E.$$

Évaluons en a. On obtient

$$\lambda_0 a + \lambda_1 u(a) + \ldots + \lambda_{n-1} u^{n-1}(a) = 0_{\mathscr{L}(E)}.$$

Or, la famille $(a, u(a), \ldots, u^{n-1}(a))$ est libre car c'est une base, donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$, CQFD.
Ceci achève de prouver que $(\mathrm{Id}_E, u, \ldots, u^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}(u)$ qui est donc de dimension n.