Lycée Condorcet
PCSI

Mai 2024

Applications linéaires et matrices

Table des matières

Dans tout ce chapitre E et F désignent des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie non nulles.

1 Matrices d'une application linéaire

1.1 Matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soit $\mathcal{B}=(b_1,\dots,b_n)$ une base de E. Alors, pour tout vecteur x de E, il existe un unique $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{K}^n$ tel que $x=\sum_{k=1}^{n}x_kb_k$. Les scalaires $x_1,\dots,x_n$ sont les coordonnées (ou : composantes) de x dans la base $\mathcal{B}$.

Définition 1.

On appelle **matrice du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$** la matrice colonne $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$.

Ainsi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)\in\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- Remarque : On utilisera souvent le léger abus consistant à identifier les vecteurs colonnes avec les vecteurs lignes.

Exemple 1

1. Prenons $E=\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{B}_0=(e_1,e_2,e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Posons $b_1=(1,1,1)$, $b_2=(1,0,1)$, $b_3=(0,1,1)$. Notons $\mathcal{B}=(b_1,b_2,b_3)$. La famille $\mathcal{B}$ est une base de E.
   Soit $v=(3,0,2)$. Déterminer les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(v)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$.
   Posons $\mathcal{B}'=(b_1,b_3,b_2)$. C'est aussi une base de $\mathbb{R}^3$. Que vaut $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(v)$?
2. Prenons $E=\mathbb{R}_3[X]$. Posons $\mathcal{B}_0=(1,X,X^2,X^3)$ et $\mathcal{B}_1=(1,X-1,(X-1)^2,(X-1)^3)$. On sait que $\mathcal{B}_0$ est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Montrer que $\mathcal{B}_1$ est aussi une base de $\mathbb{R}_3[X]$.
   Soit $P=X^3-3X^2+3X-1$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0}(P)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(P)$.
   Même question avec le polynôme $P=2X^3-X^2-4X+3$. Question bonus : soit $A\in\mathbb{R}_3[X]$. Comment fait-on pour voir sur la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(A)$ si le scalaire 1 est racine de A ? si le scalaire 1 est racine double de A ?

Proposition 2.

L'application ϕ définie par :
$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) \end{array} \right.$$
est un isomorphisme d'espace vectoriel. En particulier ϕ est linéaire et pour tout $x, y \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ on a :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda x + y) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$$

Démonstration : Avec les notations de l'énoncé montrons que ϕ est linéaire.
Soient $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ les coordonnées de respectivement x et y dans E. Un calcul rapide montre que
$$\lambda x + y = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i) b_i$$
Ainsi les coorodonnées de $\lambda x + y$ dans $\mathcal{B}$ sont $(\lambda x_1 + y_1, \cdots, \lambda x_n + y_n)$. On a donc bien
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\lambda x + y) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$$
L'application ϕ est bien linéaire.
Montrons que c'est un isomorphisme.
Montrons tout d'abord qu'elle est injective.
Soit $x \in \ker \phi$. On a alors
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
les coorodonnées de x sont nuls il est donc nul. Ainsi $\ker \phi = \{0_E\}$ l'application est donc injective.
Notons alors que $\dim E = n = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Ainsi d'après le théorème du rang ϕ est aussi surjective.
$$\boxed{\phi \text{ est donc un isomorphisme}}$$
■

• **Remarque** Soit $x \in E$. Notons $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$: on a donc $x = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$. Soit $\mathcal{B}' = (b'_1, \ldots, b'_n)$ une autre base de E. Puisque $x = x_1 b_1 + \cdots + x_n b_n$, on a aussi
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = x_1 \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(b_1) + \cdots + x_n \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(b_n).$$
Ainsi la connaissance des n matrices $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(b_1), \ldots, \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(b_n)$ permet de trouver les matrices, dans la base $\mathcal{B}'$, des autres vecteurs de E. D'où l'intérêt de considérer la matrice d'une famille de vecteurs.

Soit $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ une base de E.
Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Soit $(v_1, \ldots, v_q)$ une famille de vecteurs de E. Pour chaque $j \in [\![1, q]\!]$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_j)$ est une matrice colonne (à n lignes) Pour constituer la matrice de la famille $(v_1, \ldots, v_q)$, on se contente de mettre côte à côte les q colonnes correspondant aux q vecteurs $v_1, \ldots, v_q$ (en respectant l'ordre des vecteurs dans la famille) : cela donne la définition suivante, où l'on conserve ces notations.

Définition 3.

Notons, pour $j \in [\![1, q]\!]$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_j) = X_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ (i.e. $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} b_i$).

La matrice de la famille $(v_1, \ldots, v_q)$ **dans la base** $\mathcal{B}$ est la matrice notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_q)$, définie par

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_q) = (X_1 \mid X_2 \mid \ldots \mid X_q)$$

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_q) = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q}}.$$

C'est une matrice à n lignes et q colonnes.

Exemple 2

1. Dans l'exemple 1 du paragraphe précédent, on avait travaillé avec une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$. Posons

$$\begin{array}{lcl} v_1 & = & b_1 + 2b_2 + 3b_3 \\ v_2 & = & 4b_1 + 5b_2 + 6b_3 \\ v_3 & = & -b_1 - b_2 - b_3 \\ v_4 & = & -2b_1 + b_3 \\ v_5 & = & -5b_2 - 7b_3 \end{array}$$

   Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & -5 \\ 3 & 6 & -1 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

2. Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $P_a = (X + a)^2$. Donner la matrice de la famille (P_{-1}, P_0, P_1, P_2) dans la base canonique $(1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Définition 4 (Cas particulier)**.**

Avec les notations de la définition, supposons que $q = n$ et que la famille $(v_1, \ldots, v_n)$ soit une base de E. Notons $\mathcal{B}' = (v_1, \ldots, v_n)$.
La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(v_1, \ldots, v_n) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ est appelée **matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$** et on la note $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$.

1.2 Matrice d'une application linéaire dans des bases

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Notons $p = \dim E$ et $n = \dim F$. On suppose que $p \neq 0$ et $n \neq 0$.
Soit $\mathcal{B}_E = (b_1, \dots, b_p)$ une base de E. Soit $\mathcal{B}_F = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ une base de F.

Définition 5.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
On appelle **matrice de u relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$** la matrice, relativement à la base $\mathcal{B}_F$, de la famille de vecteurs $\big(u(b_1), \dots, u(b_p)\big)$. On la note $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F, \mathcal{B}_E}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}\big(u(b_1), \dots, u(b_p)\big).$$

C'est une matrice à $n = \dim(F)$ lignes, et $p = \dim(E)$ colonnes.

Exemple 3

1. On reprend l'exemple des paragraphes précédents. On travaillait dans $\mathbb{R}^3$, avec la base canonique $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3)$, et une base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$, avec $b_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $b_2 = e_1 + e_3$, $b_3 = e_2 + e_3$.
   Soit
   $$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & \big(\ 2x + y + z\ ,\ -x - y - z\ \big) \end{array}.$$
   Notons $\mathcal{B}'_0 = (e'_1, e'_2)$ la base canonique sur $\mathbb{R}^2$. Posons aussi $\beta_1 = (4, -1) \in \mathbb{R}^2$ et $\beta_2 = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$. Il est facile de vérifier que la famille $\mathcal{B}' = (\beta_1, \beta_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ (exercice). Déterminer les matrices suivantes :
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_0, \mathcal{B}_0}(u), \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}_0}(u), \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_0, \mathcal{B}}(u), \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(u).$$
   Déterminer également $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_0, \mathcal{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_0}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$.
2. Déterminer la matrice dans les bases canoniques de l'application :
   $$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$$
3. On travaille dans $\mathbb{R}_3[X]$. On note $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, et $\mathcal{B}_1 = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ qui est aussi une base de $\mathbb{R}_3[X]$ (exercice). Considérons l'application linéaire
   $$u: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(1) \end{array}.$$
   L'espace d'arrivée est $\mathbb{R}$. On le munit de la base $\mathcal{B}_2 = (1)$ (c'est la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$). Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_0}(u)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1}(u)$.

- **Remarque**. La matrice (dans des bases données) d'une forme linéaire est une matrice ligne.

Depuis le chapitre sur les matrices nous nommons la matrice diagonale dont les éléments de la diagonale sont des 1 matrice identité. Cette terminologie parait a priori assez étrange étant donné que l'identité est un terme issu des applications. La proposition suivante va (enfin !) éclairer cet usage.

Proposition 6 (Matrice de l'identité, d'une homothétie).

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
La matrice de l'identité dans *une* base de E est la matrice identité.
Plus généralement, pour toute base $\mathcal{B}$ de E et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\mathrm{Mat}(\lambda Id_E) = \lambda I_n$.

Attention !
La matrice de Id_E dans un couple de bases $(\mathcal{B}', \mathcal{B})$ avec $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}'$ n'est pas la matrice identité !

Proposition 7.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soient F et G deux sous-espaces supplèmentaires de E de dimension respective r et $n-r$.
Soit $\mathcal{B}$ est une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.
La matrice de la **projection** p de E sur F parallèlement à G est la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} I_{r,r} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$$

La matrice de la **symétrie** s par rapport à F parallèlement à G est la matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_{r,r} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & -I_{n-r,n-r} \end{pmatrix}$$

- Pour la suite du paragraphe, on note $\varphi_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}$ l'application

$$\varphi_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E} : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u) \end{array}.$$

Proposition 8.

Pour tous $u, v \in \mathcal{L}(E,F)$, et tout $\lambda \in \mathbb{K}^2$, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\lambda u + v) = \lambda \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u) + \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(v).$$

Autrement dit, $\varphi_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}$ est linéaire.

Démonstration : Fixons j un entier entre 1 et p. Par définition, la j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(\lambda u + v)$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}((\lambda u + v)(b_j)) \quad = \quad \lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u(b_j)) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(v(b_j))$$

Cette égalité est donnée par la proposition 2. La dernière matrice est la $j$ième colonne de la matrice $\lambda \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(u) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(v)$.
Les matrices étant égales colonne par colonne, elles sont égales tout court ! ■

- **Remarque.** À toute application linéaire de E dans F on sait associer une matrice, relativement à des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. Ces deux bases étant fixées, deux questions se posent :
  - — Plusieurs applications linéaires peuvent-elles donner la même matrice (i.e. l'application $\varphi_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}$ est-elle non-injective) ? On va voir que la réponse est non.
  - — Toute matrice (à n lignes et p colonnes) correspond-elle à une application linéaire (i.e. $\varphi_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}$ est-elle surjective) ? On va voir que la réponse est oui.

Proposition 9.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ telle que $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u)$.

Autrement dit, $\varphi_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}$ est un isomorphisme.
Ainsi $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont isomorphes.

Démonstration : Soit $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ une matrice de taille $n \times p$ à coefficient dans $\mathbb{K}$.
Pour tout $j \in [\![1,p]\!]$ on note f_j le vecteur de F :

$$f_j = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}\beta_i$$

On sait alors qu'il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ vérifiant :

$$\forall j \in [\![1,p]\!], u(b_j) = f_j$$

et donc vérifiant :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u) = M.$$

Ainsi la matrice M admet un unique antécédent par l'application $\varphi_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}$. L'application $\varphi_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}$ est donc un isomorphisme. ■

Remarque On retrouve que $\dim \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F) = \dim E \times \dim F$.

- **Notation.** Quand $E = F$ et $\mathcal{B}_E = \mathcal{B}_F$, on note, pour $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_E}(u)$.

1.3 Interprétation du produit matriciel

1.3.1 Image d'un vecteur par une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Notons $p = \dim E$ et $n = \dim F$. On suppose que $p \neq 0$ et $n \neq 0$.
Soit $\mathcal{B}_E = (b_1, \dots, b_p)$ une base de E. Soit $\mathcal{B}_F = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ une base de F.

Proposition 10.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $x \in E$. Posons $y = u(x)$.
Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u)$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(y)$. Alors puisque $y = u(x)$,

$$Y = AX.$$

C'est à dire, en développant les notations :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}\big(u(x)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x).$$

Démonstration : En plus des notations du pargraphe nous notons :

$$X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}, \qquad Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u) = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$$

Avec les notations du paragraphe, nous voulons démontrer que

$$Y = AX$$

Notons tout d'abord que le produit est bien défini et que les matrices Y et AX ont même taille.
Montrons maintenant que les coordonnées de l'image $u(x)$ dans la base $\mathcal{B}_F$ s'obtiennent à l'aide d'un *produit matriciel*. Puisque $x = \sum_{j=1}^{p} x_j b_j$, on obtient par linéarité :

$$u(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(b_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\beta_i\right) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}x_j\beta_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j\right)\beta_i$$

En particulier si nous fixons $i \in [\![1,n]\!]$, la coordonnée de $u(x)$ sur β_i a été notée y_i. On vient donc d'obtenir

$$y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j}x_j \qquad \text{c'est à dire} \qquad [Y]_{i,1} = \sum_{j=1}^{p} [A]_{i,j}[X]_{j,1} = [AX]_{i,1}.$$

Ceci achève de démontrer $Y = AX$. ■

Corollaire 11.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $\ell \in \mathbb{N}^*$. Soit $(w_1,\ldots,w_\ell)$ une famille de vecteurs de E. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}\big(u(w_1),\ldots,u(w_\ell)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(w_1,\ldots,w_\ell).$$

1.3.2 Composition des applications linéaires

Soit $(m,n,p) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels tels que $\dim E = p$, $\dim F = n$, et $\dim G = m$. Soient $\mathcal{B}_E = (b_1,\ldots,b_p)$ une base de E, $\mathcal{B}_F$ une base de F, et $\mathcal{B}_G$ une base de G.

Proposition 12.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit $v \in \mathcal{L}(F,G)$. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u)$, $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(v)$, et $A'' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(v\circ u)$. Alors

$$A'' = A'A,$$

c'est à dire

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(v\circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(v)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u).$$

Démonstration : En utilisant la définition de la matrice de $v\circ u$ dans les bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$, on a

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(v\circ u) & = & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G}\big(v\circ u(b_1),\ldots,v\circ u(b_p)\big) \\ & = & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G}\Big(v\big(u(b_1)\big),\ldots,v\big(u(b_p)\big)\Big) \\ & = & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(v)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}\big(u(b_1),\ldots,u(b_p)\big),\end{array}$$

la dernière égalité étant due au corollaire 12. Or par définition de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u)$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}\big(u(b_1),\ldots,u(b_p)\big) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u),$$

donc finalement

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(v\circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(v)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(u).$$

■

Proposition 13.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels de même dimension finie non nulle et $u \in \mathcal{L}(E,F)$.
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases respectivement de E et F. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)$. Alors

$$u \text{ est bijective ssi } A \text{ est inversible}$$

Démonstration : On considère les mêmes notations que dans l'énoncé.
Montrons cette équivalence par double implication.
• Supposons que u soit bijective alors elle admet une application réciproque. On a alors $u^{-1}\circ u = id_E$ et $u\circ u^{-1} = id_F$. On a alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(u^{-1})\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(id_E) = I_n, \text{ et } \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}\mathcal{B}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{C}}(u^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(id_F) = I_n$$

La matrice A est donc inversible d'inverse $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u^{-1})$.
• Supposons que A soit inversible et montrons que u admet une application réciproque.
D'après la proposition 9 l'application $\varphi_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$ définie par :

$$\begin{array}{rccc}\varphi_{\mathcal{B},\mathcal{C}}: & \mathcal{L}(F,E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)\end{array}.$$

est un isomorphisme, il existe donc une unique application linéaire $v \in \mathcal{L}(F,E)$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(v) = A^{-1}$$

On a alors :

$$I_n = AA^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(v) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(u \circ v)$$

Ainsi comme $I_n = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{C}}(id_F)$ et comme $\varphi_{\mathcal{C},\mathcal{C}}$ est un isomorhisme.

$$u \circ v = id_F$$

On procède alors de la même façon pour montrer que $v \circ u = id_E$. L'application u admet donc une application réciproque. Elle est donc bijective. ■

Exemple 4

Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'endormphisme ψ de $\mathbb{K}_n[X]$ dont la matrice dans la base canonique est M.
2. En déduire que M est inversible et déterminer M^{-1}.

Proposition 14.

Supposons que E soit de dimension n soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$ une famille d'éléments de E.
La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$ est inversible si et seulement si $(u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E.

Démonstration : Avec les notations de l'énoncé notons $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et u l'endomorphisme vérifiant

$$\forall k \in [\![1, n]\!], u(e_i) = u_k$$

On a alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ d'où

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) \text{ est inversible} \quad & \Leftrightarrow \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ est inversible} \\ & \Leftrightarrow \quad u \text{ est bijectif} \\ & \Leftrightarrow (u(e_1), \cdots, u(e_n)) = (u_1, \cdots, u_n) \text{ est une base de } E. \end{aligned}$$ ■

1.4 Changement de bases

Définition 15.

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, on appelle matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$.

• **Remarque** :
Nous verrons plus loin que cette terminologie pose problème !

Exemple 5

On reprend l'exemple 1 du paragraphe précédent. On avait $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$, avec $b_1 = e_1 + e_2 + e_3$, $b_2 = e_1 + e_3$, $b_3 = e_2 + e_3$. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$.
Remarquons que $e_1 = b_1 - b_3$, $e_2 = b_1 - b_2$, $e_3 = b_2 + b_3 - b_1$. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}_0$.

Proposition 16.

Supposons que E soit de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.

1. $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_E)$.
2. $P_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = I_n$.
3. $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ est inversible et $(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

Démonstration : 1. Notons $\mathcal{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$. Par définition

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(id_E(e'_1), \cdots, id_E(e'_n)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(e'_1, \cdots, e'_n) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

2.
$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(id_E)$$
Et d'après la proposition 6 il s'agit de la matrice identité.

3. On a
$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(id_E)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_E) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(id_E) = I_n$$
Ainsi $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ est bien inversible et son inverse est $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$. ■

Proposition 17.

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $x \in E$. Notons que $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, X la matrice des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et X' la matrice des coordonnées de x dans $\mathcal{B}'$. On a

$$X = PX'$$

Démonstration : On a :
$$PX' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}(id_E)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(id_E(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = X$$ ■

• **Remarque :** La dénomination matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est problématique puisque dans les faits elle nous permet de calculer les coordonnées des vecteurs dans la base $\mathcal{B}$ à l'aide des coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$, on passe donc des coordonnées dans $\mathcal{B}'$ aux coordonnées dans $\mathcal{B}$!

Proposition 18.

Supposons que E et F soient de dimension non nulles respective p et n. Soient $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Notons $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $Q = P_{\mathcal{C},\mathcal{C}'}$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(u)$, on a :

$$A' = Q^{-1}AP.$$

Démonstration : Considérons le diagramme suivant :

On a alors les égalités :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}(id_E)\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(id_E)$$

Avec les notations de l'énoncé on retrouve bien l'égalité :

$$A' = Q^{-1}AP$$

■

Exemple 6

On pose $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (1, 1, 0)$, $v_3 = (1, 2, 3)$, $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, $G = \mathrm{Vect}(v_3)$.

1. Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On pose alors $F = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$, $G = \mathrm{Vect}(v_3)$, de soirte que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
Soit s la symétrie par rapport à F parallètement à G.

2. Déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$.
3. Calculer la matrice de s dans la base canonique.
4. En déduire l'expression de s.

Exemple 7

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (10x - y - z, -6x + 9y - 3z, -2x - y + 11z) \end{array} \right.$$

et on note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{C} = ((1, 3, 1), (1, 0, -2), (0, 1, -1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Détermoner $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$.
3. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction.

1. On a directement $A = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -1 \\ -6 & 9 & -3 \\ -2 & -1 & 11 \end{pmatrix}$

2. Notons $P = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$. On a :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

En appliquant l'algorithme de Gauss on obtient que P est inversible et que :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 2/3 & -1/6 & -1/6 \\ -1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ainsi la famille $\mathcal{C}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.
On utilise la formule de changement de base : $B = P^{-1}AP$. Ainsi, après calcul, on obtient :

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

3. La matrice B étant diagonale, on obtient $B^n = \begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 12^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}$ puis, par récurrence, $A^n = PB^nP^{-1}$. Après calcul, on en déduit :

$$A^n = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} (2.6^n + 4.12^n) & (6^n - 12^n) & (6^n - 12^n) \\ 6(6^n - 12^n) & 3(6^n - 12^n) & 3(6^n - 12^n) \\ 2(6^n - 12^n) & (6^n - 12^n) & (6^n - 5.12^n) \end{pmatrix}$$

2 Définitions importées des applications linéaires vers les matrices

2.1 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Définition-Proposition 19.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **application linéaire canoniquement associée** à A l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{array} \right.$$

L'application f est linéaire et sa matrice dans les bases canoniques de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ n'est autre que A.

Lorsque A est carrée, f est appelée **endomorphisme canoniquement associée** à A.

Démonstration : Notons $\mathcal{B}_p = (E_1, E_2, \cdots, E_p)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{B}_n = (E'_1, \cdots, E'_n)$ celle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Soit $j \in [\![1, p]\!]$. On a $E_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $f(E_j) = AE_j = C_j$ où C_j est la j-ième colonne de A.

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n}(f(E_j)) = C_j$. On a donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_p}(f) = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_p \end{pmatrix} = A$. ■

Exemple 8

1. Soit f l'application linéaire canoniquement associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   Calculer $f(1, 2, 3)$ et $f(-1, 3, 2)$.
   Pourquoi n'avons nous besoin d'aucun calcul pour donner $f(1, 0, 0)$, $f(0, 1, 0)$ et $f(0, 0, 1)$?
2. Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Décrire l'effet de g sur la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2.2 Noyau, image et rang d'une matrice

Définition 20.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, u_A l'application linéaire canoniquement associée à A.

- On appelle noyau de A et on note $\ker A$ le noyau de u_A.
- On appelle image de A et on note ImA l'image de u_A.
- On appelle rang de A et on note $\mathrm{rg}A$ la dimension de $Im(A)$.

Proposition 21.

Soit $A \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$. On a

- $$\ker A = \{X \in \mathcal{M}_{p,1} : AX = 0_{n,1}\}$$
- Si $C_1, \cdots, C_p$ sont les colonnes de la matrice A.
$$Im(A) = \text{Vect}(C_1, \cdots, C_p)$$

Méthode (Trouver une base du noyau et de l'image d'une matrice)**.**

Soit $A \in \text{Mat}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Par définition, une colonne X de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est dans le noyau si et seulement si $AX = 0_{n,1}$. On sait résoudre un tel système homogène (pivot de Gauss) et en trouver une base.
- Par définition, $Im(A)$ est engendré par les colonnes de A. On saura extraire une base de cette famille génératrice.

Exemple 9

Donner pour ces deux matrices une base de leur noyau et une base de leur image.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 22.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

— $\text{rg}(A) \leq \min(n, p)$.

— Théorème du rang :
$$p = \dim_(\ker A) + \text{rg}(A)$$

Méthode.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, de colonnes $C_1, \cdots, C_p$. Notons u_A l'application linéaire canoniquement associée. Supposons qu'on a su extraire de la famille des collones une base de $Im(A)$.

On connaît alors $\text{rg}(A)$ et le **théorème du rang** nous offre $\boxed{\dim \ker(u_A) = p - \text{rg}(u_A)}$. Pour donner une base de $\ker A = \ker(u_A)$, il suffit donc de trouver le bon nombre de vecteurs dans le noyau (et de s'assurer qu'on a une famille libre).

Pour trouver de tels vecteurs, on tâche de faire des **combinaisons linéaires nulles de collones**, ce qui est parfois simple en exploitant certaines symétrie dans la matrice. Supponsons qu'on ait une combinaison linéaire nulle des colonnes :

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j C_j = 0_{n,1}$$

En notant $(e_1, \cdots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$, on a :

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_i f(e_j) = 0_{\mathbb{K}^n}, \text{ i.e. } \quad f\left(\sum_{j=1}^{p} \alpha_j e_j\right) = 0_{\mathbb{K}^n} \quad \text{soit } \sum_{j=1}^{p} \alpha_j e_j \in \ker A.$$

Exemple 10

Donner pour ces deux matrices une base de leur noyau et une base de leur image.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 23.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a les équivalences suivantes :

$$A \text{ inversible} \iff \ker(A) = \{0\} \iff Im(A) = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \iff \text{rg}(A) = n$$

2.3 Calcul du rang

Proposition 24.

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, pour $P \in GL_p(\mathbb{K})$ et $Q \in Gl_n(\mathbb{K})$.

1. $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg}(A), \text{rg}(B))$.
2. $\text{rg}(QA) = \text{rg}(A) = \text{rg}(AP)$.
3. Si $A \sim_{\mathcal{L}} B$ ou $A \sim_{\mathcal{C}} B$, alors $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$.

Ainsi le rang d'une matrice est invariant lorque l'on effectue des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

Démonstration : Notons u, u', v et w les applications linéaires canoniquement associées à A, B P et Q. Notons $\mathcal{B}_p$, $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_q$ les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$, $\mathbb{K}^n$ et $\mathbb{K}^q$.

1. On a alors $AB = \text{Mat}_{\mathcal{B}_n\mathcal{B}_p}(u)\text{Mat}_{\mathcal{B}_p\mathcal{B}_q}(v) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_q}(u \circ u')$ or on a vu au chapitre précédente que $\text{rg}(u \circ u') \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(u'))$. Par définition du rang d'une matrice on a bien le résultat attendu.
2. De même $AP = \text{Mat}_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_p}(u)\text{Mat}_{\mathcal{B}_p}(v) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_p}(u \circ v)$. Ainsi, $u \circ v$ est canoniquement associée à AP. Comme P et Q sont inversible v et w sont des isomorphismes. On a alors vu dans le chapitre précédent que $\text{rg}(u \circ v) = \text{rg}(u) = \text{rg}(u \circ w)$, donc $\text{rg}(AP) = \text{rg}(A) = \text{rg}(QA)$.
3. Si $A \sim_{\mathcal{L}} B$ (resp. $A \sim_{\mathcal{C}} B$) il existe E (resp. F) un produit d'opérations élémentaires telle que $B = EA$ (resp B=AF). Comme E (resp F) est inversible, on obtient $\text{rg}(B) = \text{rg}(A)$.

■

Corollaire 25.

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ est inversible à gauche} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ est inversible à droite}$$

Démonstration : Supposons que A soit inversible à gauche, c'est à dire qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$. D'après le résultat précédent :

$$\mathrm{rg}(BA) \leq \mathrm{rg}(A) \leq n$$

Mais $BA = I_n$ et $\mathrm{rg}(I_n) = n$ d'où $\mathrm{rg}(A) = n$. Ainsi d'après la proposition 23 A est inversible.
On procède par un raisonnement similaire pour montrer que si A est inversible à droite alors elle est inversible. ■

Proposition 26.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de A est le nombre de pivots non nuls dans l'unique matrice R réduite échelonnée par lignes telle que $A \sim_{\mathcal{L}} R$.

Démonstration : Par la proposition précédente, on a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(R)$. Notons r le nombre de pivots non nuls dans $R = (b_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$. On a :

Par permutations des colonnes de R on obtient la matrice :

Puis en annulant les coefficients des colonnes de R, on obtient la matrice :

Ainsi $R \sim_{\mathcal{L}} J_r$ et on a $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(R) = \mathrm{rg}(J_r) = r$ ■

Remarque.
Le rang d'une matrice A est donc le rang du système linéaire homogène associé à A.

Notation.
Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq r \leq \min(n,p)$. On définit la matrice $J_r \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r,p-r} \end{pmatrix}$$

On a $\mathrm{rg}(J_r) = r$.

Proposition 27.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $0 \leq r \leq \min(n,p)$. Alors on a :

$$\mathrm{rg}(A) = r \iff A \text{ est équivalente à } J_r$$

Exemple 11

Calculer le rang et l'inverse s'il existe de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -2 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Proposition 28.

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$.

Démonstration : D'après la proposition précédente, il existe $P \in Gl_p(\mathbb{K})$, $Q \in Gl_n(\mathbb{K})$ tels que $A = QJ_rP$. En prenant la transposée, on obtient $A^T = P^T J_r^T Q^T$. Or $P^T \in Gl_p(\mathbb{K})$ et $Q^T \in Gl_n(\mathbb{K})$, et donc A^T est équivalente à $J_r^T = \begin{pmatrix} I_r & 0_{n,n-r} \\ 0_{p-r,r} & 0_{p-r,n-r} \end{pmatrix}$.
Par la proposition précédente, on a donc $\mathrm{rg}(A^T) = \mathrm{rg}(J_r^T)) = r$. ■