

DS9 mathématiques

Exercices et Problèmes

4 heures

Exercices

Exercice 1.

Montrer que l'ensemble

$$\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = f(1)\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 2.

Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soient les ensembles $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Démontrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 3.

Soit E l'ensemble des suites convergentes et F celui des suites réelles de limite nulle.

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On admettra que de la même façon, F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit c la suite constante égale à 1. Prouver que

$$E = F \oplus \text{Vect}(c).$$

Exercice 4.

Soient les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$

$$u_1 = (1, 2, 3, 0) \quad u_2 = (1, 1, 1, 1), \quad u_3 = (1, 0, 1, 0), \quad u_4 = (1, 1, 3, -1).$$

1. Quel est le rang de (u_1, u_2, u_3, u_4) ?
2. Compléter la famille (u_1, u_2, u_3) en une base de $\mathbb{R}^4$.
En déduire un supplémentaire de $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Problème I

On étudie dans cet exercice deux sous-espaces vectoriels de $M_2(\mathbb{R})$. On fixe les notations suivantes pour la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$:

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note F l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.

On note G l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les autres, c'est-à-dire

$$G = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \forall M \in M_2(\mathbb{R}) \quad AM = MA\}.$$

1. Étude de F . Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

2. Étude de G .

(a) Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$. Justifier qu'il n'est pas réduit à $\{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$.

(b) Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que A appartient à G si et seulement si

$$\forall (i, j) \in \{1, 2\}^2 \quad AE_{i,j} = E_{i,j}A.$$

(c) Soit $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Calculer $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$ pour les quatre couples (i, j) possibles. Que dire de A si cette matrice appartient à G ?

(d) En déduire que G est une droite vectorielle.

3. $M_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

(a) En utilisant un argument de dimension, prouver que F et G sont supplémentaires dans $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Proposer une seconde preuve par analyse-synthèse.

Problème II

Supplémentaire commun à deux hyperplans

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E , c'est à dire deux sous-espaces vectoriels chacun de dimension $n - 1$. On suppose que $H_1 \not\subset H_2$ (H_1 n'est pas inclus dans H_2).

1. Justifier que $H_2 \not\subset H_1$.

2. Soient $x_1 \in H_1 \setminus H_2$ et $x_2 \in H_2 \setminus H_1$. Démontrer :

$$H_1 \oplus \text{Vect}(x_2) = E \quad \text{et} \quad H_2 \oplus \text{Vect}(x_1) = E.$$

3. Notons $x_3 = x_1 + x_2$.

Démontrer que $\text{Vect}(x_3)$ est un supplémentaire commun à H_1 et H_2 .

4. Illustrer ce qui précède à l'aide d'un beau dessin, si ce n'est pas déjà fait.

5. Justifier que $H_1 + H_2 = E$.

6. Démontrer que $H_1 \cap H_2$ et $\text{Vect}(x_1, x_2)$ sont supplémentaires.

Problème III

1. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q' = P$ et $\int_0^1 Q(x) dx = 0$.
- (b) En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes à coefficients réels $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$B_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B'_n = nB_{n-1} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 B_n(x) dx = 0.$$

2. (a) Calculer B_0, B_1, B_2 et B_3 .
- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de B_n .
- (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que la famille $(B_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = B_n(0).$$

- (a) Calculer b_0, b_1, b_2 et b_3 .
- (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} X^k.$$

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$C_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X).$$

- i. Montrer que :

$$C_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C'_n = nC_{n-1} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 C_n(x) dx = 0$$

- ii. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$.
- iii. En déduire que : $\forall p \in \mathbb{N} \quad B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.
4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n(X) = 2^{n-1} \left(B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right) \right)$.
- (b) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*, b_{2p+1} = 0$ et que, pour tout entier $n \geq 2, B_n(1) = b_n$.
5. (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2, \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_{n-k} = 0$.
- (b) En déduire une formule de récurrence permettant d'exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}, b_{n+1}$ en fonction de $b_0, b_1, \dots, b_n$.
- (c) Sans calculer le polynôme B_4 , calculer le nombre b_4 .

6. Une application

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$.
- (b) En déduire la formule suivante :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n k^p = \frac{1}{p+1} (B_p(n+1) - B_{p+1}(0)).$$

- (c) Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=0}^n k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} (-1)^k b_k m^{p+1-k}$$