

DS9 mathématiques Exercices et Problèmes

4 heures

Exercices

Exercice 1.

Montrer que l'ensemble

$$\{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = f(1)\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 2.

Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soient les ensembles $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Démontrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 3.

Soit E l'ensemble des suites convergentes et F celui des suites réelles de limite nulle.

1. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On admettra que de la même façon, F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Soit c la suite constante égale à 1. Prouver que

$$E = F \oplus \text{Vect}(c).$$

Exercice 4.

Soient les quatre vecteurs de $\mathbb{R}^4$

$$u_1 = (1, 2, 3, 0) \quad u_2 = (1, 1, 1, 1), \quad u_3 = (1, 0, 1, 0), \quad u_4 = (1, 1, 3, -1).$$

1. Quel est le rang de (u_1, u_2, u_3, u_4) ?
2. Compléter la famille (u_1, u_2, u_3) en une base de $\mathbb{R}^4$.
En déduire un supplémentaire de $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4)$ dans $\mathbb{R}^4$.

Problème I

On étudie dans cet exercice deux sous-espaces vectoriels de $M_2(\mathbb{R})$. On fixe les notations suivantes pour la base canonique de $M_2(\mathbb{R})$:

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note F l'ensemble des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ dont la trace est nulle.

On note G l'ensemble des matrices qui commutent avec toutes les autres, c'est-à-dire

$$G = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \forall M \in M_2(\mathbb{R}) \quad AM = MA\}.$$

1. Étude de F . Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

2. Étude de G .

(a) Démontrer que G est un sous-espace vectoriel de $M_2(\mathbb{R})$. Justifier qu'il n'est pas réduit à $\{0_{M_2(\mathbb{R})}\}$.

(b) Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$. Montrer que A appartient à G si et seulement si

$$\forall (i, j) \in \{1, 2\}^2 \quad AE_{i,j} = E_{i,j}A.$$

(c) Soit $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. Calculer $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$ pour les quatre couples (i, j) possibles. Que dire de A si cette matrice appartient à G ?

(d) En déduire que G est une droite vectorielle.

3. $M_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

(a) En utilisant un argument de dimension, prouver que F et G sont supplémentaires dans $M_2(\mathbb{R})$.

(b) Proposer une seconde preuve par analyse-synthèse.

1. Étude de F . On peut écrire

$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \{x(E_{1,1} - E_{2,2}) + yE_{1,2} + zE_{2,1}, x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}(E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1}) \end{aligned}$$

Il faut vérifier que la famille de trois matrices mise en évidence ci-dessus est libre, ce qui se fait sans difficulté. La famille est alors une base du s.e.v. qu'elle engendre (elle est de rang 3) et donc $\dim(F) = 3$.

2. Étude de G .

(a) On va utiliser la caractérisation habituelle.

- La matrice nulle $0_{2,2}$ est bien dans G puisqu'elle commute avec toutes les matrices de $M_2(\mathbb{R})$.
- Soient A et B deux matrices de G . Soient λ et μ deux réels. Montrons que $\lambda A + \mu B$ est dans G . On doit donc démontrer que cette matrice commute avec tout le monde. Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$. On a

$$(\lambda A + \mu B)M = \lambda AM + \mu BM \underset{A, B \in G}{=} \lambda MA + \mu MB = M(\lambda A + \mu B),$$

ce qui démontre que G est stable par combinaison linéaire.

(b) L'implication directe est évidente : si A est dans G , elle commute avec toutes les matrices, donc notamment avec les quatre matrices de la base canonique. Supposons réciproquement que A commute avec ces quatre matrices. Soit M une matrice quelconque de $M_2(\mathbb{R})$; elle se décompose sur la base sous la forme $M = xE_{1,1} + yE_{1,2} + zE_{2,1} + tE_{2,2}$. On calcule alors

$$\begin{aligned} AM &= A(xE_{1,1} + yE_{1,2} + zE_{2,1} + tE_{2,2}) \\ &= xAE_{1,1} + yAE_{1,2} + zAE_{2,1} + tAE_{2,2} \\ &= xE_{1,1}A + yE_{1,2}A + zE_{2,1}A + tE_{2,2}A \\ &= (xE_{1,1} + yE_{1,2} + zE_{2,1} + tE_{2,2})A \\ &= MA. \end{aligned}$$

(c) On a

$$AE_{1,1} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{pmatrix}, AE_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & z \end{pmatrix}, AE_{2,1} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ t & 0 \end{pmatrix}, AE_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

$$E_{1,1}A = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,2}A = \begin{pmatrix} z & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{2,1}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}, E_{2,2}A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & t \end{pmatrix}$$

Supposons que A appartient à G , elle commute alors avec les quatre matrices de la base canonique. En égalant $AE_{1,1}$ et $E_{1,1}A$, on obtient que y et z sont nuls. En égalant $AE_{1,2}$ et $E_{1,2}A$, on obtient que $x = t$. Ceci donne que la matrice A est de la forme $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = xI_2$ avec x réel.

(d) Dans la question précédente, on a montré que toute matrice de G était un multiple scalaire de I_2 . Réciproquement, il est facile de voir que toute matrice de la forme xI_2 est dans G , puisque I_2 commute "avec tout le monde". Ainsi,

$$G = \text{Vect}(I_2).$$

Le s.e.v. G , engendré par un vecteur non nul, est bien une droite vectorielle.

3. $M_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

(a) Commençons par remarquer que

$$\dim(F) + \dim(G) = 3 + 1 = 4 = \dim(M_2(\mathbb{R})).$$

Dans ces conditions, en utilisant une caractérisation en dimension finie, il suffit de vérifier que F et G sont en somme directe pour obtenir qu'ils sont supplémentaires.

Pour le montrer, remarquons que si une matrice A est dans $F \cap G$, alors étant dans G , elle s'écrit $A = xI_2$, avec $x \in \mathbb{R}$. Étant dans F , sa trace, qui vaut $2x$ est nulle. Ainsi, $x = 0$ et $A = 0_{2,2}$. Ceci montre que $F \cap G = \{0_{2,2}\}$ et achève de montrer que $M_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

(b) Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$.

• Supposons l'existence d'un couple $(B, C) \in F \times G$ tel que $A = B + C$. Puisque C est dans $G = \text{Vect}(I_2)$, elle s'écrit $C = \lambda I_2$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Passons à la trace :

$$\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B + C) = \text{Tr}(B) + \text{Tr}(C) = 0 + \lambda \text{Tr}(I_2) = 2\lambda.$$

On en déduit

$$C = \frac{\text{Tr}(A)}{2} I_2 \quad \text{et} \quad B = A - \frac{\text{Tr}(A)}{2} I_2.$$

L'unicité du couple (B, C) est acquise, à ce stade.

• Posons

$$B := A - \frac{\text{Tr}(A)}{2} I_2 \quad \text{et} \quad C = \frac{\text{Tr}(A)}{2} I_2.$$

Il est clair que $B + C = A$, que $C \in \text{Vect}(I_2) = G$ et facile de vérifier que $\text{Tr}(B) = 0$, donc que $B \in F$. Ceci démontre l'existence d'un couple (B, C) qui convient.

• Pour toute matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(B, C) \in F \times G$ tel que $A = B + C$. On a bien démontré que $M_2(\mathbb{R}) = F \oplus G$.

Problème II

Supplémentaire commun à deux hyperplans

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \geq 2$. Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E , c'est à dire deux sous-espaces vectoriels chacun de dimension $n - 1$. On suppose que $H_1 \not\subset H_2$ (H_1 n'est pas inclus dans H_2).

1. Justifier que $H_2 \not\subset H_1$.

2. Soient $x_1 \in H_1 \setminus H_2$ et $x_2 \in H_2 \setminus H_1$. Démontrer :

$$H_1 \oplus \text{Vect}(x_2) = E \quad \text{et} \quad H_2 \oplus \text{Vect}(x_1) = E.$$

3. Notons $x_3 = x_1 + x_2$.

Démontrer que $\text{Vect}(x_3)$ est un supplémentaire commun à H_1 et H_2 .

4. Illustrer ce qui précède à l'aide d'un beau dessin, si ce n'est pas déjà fait.

5. Justifier que $H_1 + H_2 = E$.

6. Démontrer que $H_1 \cap H_2$ et $\text{Vect}(x_1, x_2)$ sont supplémentaires.

1. Supposons $H_2 \subset H_1$. Alors, puisque $\dim H_1 = \dim H_2$, on a forcément $H_1 = H_2$, ce qui n'est pas puisque $H_1 \not\subset H_2$. Ceci démontre que $H_2 \not\subset H_1$.
2. Notons $D_1 = \text{Vect}(x_1)$. Puisque $x_1 \notin H_2$, x_1 ne peut pas être le vecteur nul : D_1 est une droite de E . On a

$$\dim D_1 + \dim H_2 = 1 + (n - 1) = n = \dim E.$$

Il suffit donc de prouver que D_1 et H_2 sont en somme directe pour prouver qu'ils sont supplémentaires. On a $D_1 \cap H_2 \subset D_1$, de sorte que $\dim(D_1 \cap H_2) \in \{0, 1\}$. Si $\dim(D_1 \cap H_2) = 1$, alors on a $\dim(D_1 \cap H_2) = \dim D_1$ et grâce à l'inclusion, on obtient $D_1 \cap H_2 = D_1$. Le vecteur x_1 étant dans D_1 , il est dans $D_1 \cap H_2$ donc dans H_2 ce qui est absurde. Ceci démontre que $\dim D_1 \cap H_2 = 0$.

Récapitulons : on a $\begin{cases} D_1 \cap H_2 = \{0_E\} \\ \dim D_1 + \dim H_2 = \dim E \end{cases}$ donc par caractérisation en dimension finie, $D_1 \oplus H_2$ sont supplémentaires. Par symétrie, on a aussi que $\text{Vect}(x_2) \oplus H_1 = E$.

3. Notons $D_3 = \text{Vect}(x_3)$. Ici encore, x_3 est un vecteur non nul car sinon, $x_1 + x_2 = 0_E$ puis $x_1 = -x_2 \in H_2$, ce qui n'est pas. On va démontrer que D_3 et H_1 sont supplémentaires. La situation étant symétrique, cela prouvera aussi que D_3 est un supplémentaire de H_2 (donc un supplémentaire commun à H_1 et à H_2).
On a à nouveau que $\dim D_3 + \dim H_1 = 1 + (n - 1) = n = \dim E$. Il nous suffit donc de démontrer que $D_3 \cap H_1 = \{0_E\}$. Or, $D_3 \cap H_1 \subset D_3$ donc $D_3 \cap H_1$ est de dimension inférieure à 1. Si la dimension vaut 1, on a $D_3 \cap H_1 = D_3$ puis $D_3 \subset H_1$, donc $x_3 \in H_1$.

Montrons que ceci n'est pas vrai : $x_3 = x_1 + x_2 \in H_1 \oplus \text{Vect}(x_2)$. Si x_3 est dans H_1 , alors puisque la somme précédente est directe, c'est que $x_2 = 0_E$, ce qui n'est pas puisque $x_2 \notin H_1$.

Ainsi, on a $D_3 \cap H_1 = \{0_E\}$, ce qui achève de montrer que $\text{Vect}(x_3) \oplus H_1 = E$.

4. Pour représenter nos deux hyperplans, on dessine des plans. De sorte que $H_1 \cap H_2$ est sur le dessin une droite, qui représente un sous-espace vectoriel de E dont la dimension vaut $n - 2$ comme on va le voir en question 6.
5. Soit $y \in E$. On sait que $E = \text{Vect}(x_1) \oplus H_2$ donc il existe $y_1 \in \text{Vect}(x_1)$ et $y_2 \in H_2$ tels que $y = y_1 + y_2$. Le vecteur y_1 s'écrit λx_1 , où $\lambda \in \mathbb{K}$. Puisque $x_1 \in H_1$ alors $y_1 \in H_1$. Ainsi, $y = y_1 + y_2 \in H_1 + H_2$. On a donc que $E \subset H_1 + H_2$, l'autre inclusion étant triviale.
6. La question précédente donne que $H_1 + H_2$ est de dimension n . D'après la formule de Grassmann,

$$\dim H_1 \cap H_2 = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 + H_2) = (n - 1) + (n - 1) - n = n - 2.$$

De plus, (x_1, x_2) est libre : x_1 n'est pas colinéaire à x_2 car il n'appartient pas à H_2 . Ainsi, $\text{rg}(x_1, x_2) = 2$ et $\text{Vect}(x_1, x_2)$ est un plan. On a donc

$$\dim H_1 \cap H_2 + \dim \text{Vect}(x_1, x_2) = (n - 2) + 2 = \dim E.$$

Montrons que $(H_1 \cap H_2) \cap \text{Vect}(x_1, x_2) = \{0_E\}$.

Soit y un vecteur dans l'intersection.

Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tels que $y \in \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$.

Puisque $y \in H_2$, $y = 0 \cdot x_1 + y$ et puisque $\text{Vect}(x_1)$ et H_2 sont en somme directe, $\lambda_1 x_1 = 0_E$.

De même, puisque $y \in H_1$, $y = y + 0 \cdot x_2$ et puisque $\text{Vect}(x_2)$ et H_1 sont en somme directe, $\lambda_2 x_2 = 0_E$.

On a donc $y = 0_E$, CQFD.

Deux sous-espaces vectoriels en somme directe, tels que la somme des dimensions vaut celle de l'espace : on a bien

$$(H_1 \cap H_2) \oplus \text{Vect}(x_1, x_2) = E.$$

Problème III

1. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer qu'il existe un unique $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q' = P$ et $\int_0^1 Q(x) \, dx = 0$.
 (b) En déduire qu'il existe une unique suite de polynômes à coefficients réels $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :

$$B_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad B'_n = nB_{n-1} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 B_n(x) \, dx = 0.$$

2. (a) Calculer B_0, B_1, B_2 et B_3 .
 (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de B_n .
 (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que la famille $(B_k)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
 3. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = B_n(0).$$

- (a) Calculer b_0, b_1, b_2 et b_3 .
 (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} X^k.$$

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$C_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X).$$

- i. Montrer que :

$$C_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad C'_n = nC_{n-1} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^1 C_n(x) \, dx = 0$$

- ii. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad B_n(X) = (-1)^n B_n(1 - X)$.
 iii. En déduire que : $\forall p \in \mathbb{N} \quad B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

4. (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n(X) = 2^{n-1} \left(B_n\left(\frac{X}{2}\right) + B_n\left(\frac{X+1}{2}\right) \right)$.
 (b) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}^*, b_{2p+1} = 0$ et que, pour tout entier $n \geq 2, B_n(1) = b_n$.
 5. (a) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2, \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_{n-k} = 0$.
 (b) En déduire une formule de récurrence permettant d'exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}, b_{n+1}$ en fonction de $b_0, b_1, \dots, b_n$.
 (c) Sans calculer le polynôme B_4 , calculer le nombre b_4 .
 6. Une application
 (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \quad B_n(X+1) - B_n(X) = nX^{n-1}$.
 (b) En déduire la formule suivante :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \sum_{k=0}^n k^p = \frac{1}{p+1} (B_p(n+1) - B_{p+1}(0)).$$

- (c) Montrer que :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \sum_{k=0}^n k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^p \binom{p+1}{k} (-1)^k b_k m^{p+1-k}$$

Corrigé :

1. (a) Supposons que $P = \sum_{k=1}^n a_k X^k$. On pose alors R le polynôme :

$$R = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_{k-1}}{k} X^k$$

C'est l'unique polynôme tel que : $R' = P$ et $R(0) = 0$. Toutes les primitives de P diffèrent de R d'une constante multiplicative.

On procède alors par analyse synthèse pour démontrer l'existence et l'unicité du polynôme cherché.

Analyse. Supposons qu'un tel polynôme existe. Alors, d'après ce que l'on vient de rappeler, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$Q = R + a$$

Et comme $\int_0^1 Q(x) dx = 0$, on a ainsi :

$$\int_0^1 R(x) + a dx = 0 \iff a = - \int_0^1 R(x) dx$$

Ainsi, si un tel polynôme existe, il est unique et :

$$P = R - \int_0^1 R(x) dx$$

Synthèse. Notons $Q = R - \int_0^1 R(x) dx$.

On a bien $Q' = R' = P$ et

$$\int_0^1 Q(x) dx = \int_0^1 R(x) dx - \int_0^1 \left(\int_0^1 R(x) dx \right) dx = \int_0^1 R(x) dx - \int_0^1 R(x) dx = 0$$

Il existe donc bien un unique polynôme vérifiant les propriétés demandées.

- (b) On le démontre par récurrence.

B_0 est donné.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si B_n est défini alors d'après la question précédente il existe un unique polynôme B_{n+1} tel que $B_n n + 1' = n B_n$ et $\int_0^1 B_{n+1}(t) dt = 0$.

2. (a) La relation $B_1' = 1 B_0$ donne qu'il existe a_0 tel que

$$B_1 = X + a_0$$

et la relation $\int_0^1 B_1(t) dt = 0$ donne :

$$\left[\frac{t^2}{2} + a_0 t \right]_0^1 = 0 \iff a_0 = -\frac{1}{2}$$

Ainsi

$$B_1 = X - \frac{1}{2}$$

De même on a :

$$B_2 = X^2 - X + \frac{1}{6}, \quad B_3 = X^3 - \frac{3}{2}X^2 + \frac{1}{2}X$$

- (b) Démontrons par récurrence la propriété $\text{Pr}(n)$ suivante définie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$\text{Pr}(n)$: "Le polynôme B_n est de degré n et de coefficient dominant 1 "

La proposition $\text{Pr}(0)$ est vraie par définition de B_0 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ supposons $\text{Pr}(n)$ vraie.

De la relation $B_{n+1}' = (n+1)B_n$ on déduit :

$$\deg(B_{n+1}') = \deg(B_n) \iff \deg(B_{n+1}) = \deg(B_n) + 1 \iff \deg(B_{n+1}) = n + 1$$

Par ailleurs le coefficient dominant de B_n étant 1 le terme de plus haut de degré de $(n+1)B_n$ est $(n+1)X^n$ ainsi le terme de plus haut degré de B_{n+1} est X^{n+1} . Le coefficient dominant de B_{n+1} est donc 1.

Le principe de récurrence permet ainsi de conclure que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

- (c) D'après la question précédente, la famille est à degré échelonnée donc c'est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus elle est de cardinal $n+1$ et comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ c'est bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. (a) D'après la question 2.(a) on a

$$b_0 = 1, \quad b_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{6}, \quad b_3 = 0$$

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'égalité :

$$B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} b_{n-k} X^k$$

est vraie.

On a par définition

$$\sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} b_{0-k} X^k = b_0 = 1$$

Ainsi l'égalité est vraie pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que l'égalité soit vraie pour cet entier.

Notons que, par définition, le terme constant de B_{n+1} est égal à b_{n+1} . Par ailleurs, l'égalité $B'_{n+1} = (n+1)B_n$ et l'hypothèse de récurrence donne :

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} b_{n-k} X^{k+1} + b_{n+1}$$

Après changement d'indice on a :

$$B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n+1}{k} \binom{n}{k-1} b_{n+1-k} X^k + b_{n+1}$$

Mais, pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on a

$$\frac{n+1}{k} \binom{n}{k-1} = \frac{(n+1)n!}{k(k-1)!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}$$

On a ainsi :

$$B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} X^k + b_{n+1}$$

et ainsi

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} b_{n+1-k} X^k$$

Ainsi si l'égalité est vraie à n fixée, elle est vraie en $n+1$.

Le principe de récurrence permet de conclure que l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) i. On a bien

$$C_0 = (-1)^0 B_0(1-X) = 1$$

Soit $n \in \mathbb{N}^n$, par définition de C_n et par linéarité de la dérivée et la dérivée de la composée on a :

$$C'_n = (-1)^n (-1) B'_n(1-X)$$

D'où, par définition de B_n :

$$C'_n = (-1)^{n+1} n B_{n-1}(1-X)$$

Mais $(-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}$ on a donc bien

$$C'_n = n C_{n-1}$$

Pour l'intégrale on procède au changement de variables $t = 1 - x$.

ii. On a montré à la question précédente que les C_n vérifiaient les relations définissant les B_n or on a montré qu'il existait une unique suite de polynômes vérifiant ces propriétés ainsi on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n = C_n$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B_n(X) = (-1)^n B_n(1-X)$$

iii. Soit $p \in \mathbb{N}$, on a, d'après la question précédente et comme $2p+1$ est impair :

$$B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1) B_{2p+1}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \iff 2B_{2p+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

D'où le résultat.

4. (a) Démontrons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'égalité :

$$B_n(X) = 2^{n-1} \left(B_n \left(\frac{X}{2} \right) + B_n \left(\frac{X+1}{2} \right) \right)$$

On a par définition de B_0

$$2^{-1}(B_n(0) + B_n(0)) = 1 = B_0$$

L'égalité est donc vrai pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que l'égalité soit vraie au rang n , on a alors :

$$\begin{aligned} (2^n (B_{n+1} \left(\frac{X}{2} \right) + B_{n+1} \left(\frac{X+1}{2} \right)))' &= 2^{n-1} (B_{n+1}' \left(\frac{X}{2} \right) + B_{n+1}' \left(\frac{X+1}{2} \right)) \\ &= (n+1)2^{n-1} (B_n \left(\frac{X}{2} \right) + B_n \left(\frac{X+1}{2} \right)) \end{aligned}$$

Ainsi par hypothèse de récurrence on a :

$$(2^n (B_{n+1} \left(\frac{X}{2} \right) + B_{n+1} \left(\frac{X+1}{2} \right)))' = (n+1)B_n$$

Par ailleurs on a :

$$\int_0^1 2^n \left(B_{n+1} \left(\frac{t}{2} \right) + B_{n+1} \left(\frac{t+1}{2} \right) \right) dt = 2^n \int_0^1 B_{n+1} \left(\frac{t}{2} \right) dt + 2^n \int_0^1 B_{n+1} \left(\frac{t+1}{2} \right) dt$$

Dans la première intégrale on procède au changement de variables $u = \frac{t}{2}$ et dans la deuxième $u = \frac{t+1}{2}$. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 2^n \left(B_{n+1} \left(\frac{t}{2} \right) + B_{n+1} \left(\frac{t+1}{2} \right) \right) dt &= 2^{n-1} \int_0^{1/2} B_{n+1}(u) du + 2^{n-1} \int_{1/2}^1 B_{n+1}(u) du \\ &= 2^{n-1} \int_0^1 B_{n+1}(u) du \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi le polynôme $2^n (B_{n+1} \left(\frac{X}{2} \right) + B_{n+1} \left(\frac{X+1}{2} \right))$ vérifie les même propriétés que le polynôme B_{n+1} . Par unicité de cette suite, on en déduit :

$$B_{n+1}(X) = 2^n \left(B_{n+1} \left(\frac{X}{2} \right) + B_{n+1} \left(\frac{X+1}{2} \right) \right)$$

Le principe de récurrence permet ainsi de conclure que l'égalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

D'après la question précédente :

$$B_{2p+1}(0) = 2^{2p} \left(B_{2p+1}(0) + B_{2p+1} \left(\frac{1}{2} \right) \right)$$

Mais d'après la question précédente $B_{2p+1} \left(\frac{1}{2} \right) = 0$, d'où :

$$b_{2p+1} = 2^{2p} b_{2p+1} \iff b_{2p+1} = 0$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 3.(c)ii. on a :

$$B_n(1) = (-1)^n B_n(0)$$

Si n est paire on a $(-1)^n = 1$ et

$$B_n(1) = b_n$$

et si n est impaire alors $b_n = 0$ et on a $B_n(1) = 0$ et donc

$$B_n(1) = b_n$$

5. (a) Soit $n \geq 2$. D'après la question 3.(b) on a :

$$B_n(1) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_{n-k} + b_n$$

Mais d'après la question 4.(b) on a $B_n(1) = b_n$. D'où

$$b_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_{n-k} + b_n \iff \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} b_{n-k} = 0$$

- (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, en appliquant l'égalité démontrée à la question précédente pour $n+2$ (comme $n \in \mathbb{N}$, alors $n+2 \geq 2$) on a

$$\sum_{k=2}^{n+2} \binom{n+2}{k} b_{n+2-k} + (n+2)b_{n+1} = 0 \iff b_{n+1} = -\frac{1}{n+2} \sum_{k=2}^{n+2} \binom{n+2}{k} b_{n+2-k}$$

On procède au changement d'indice $k' = n+2-k$, et comme, pour tout $k \in \llbracket 2, n+2 \rrbracket$, $\binom{n+2}{k} = \binom{n+2}{n+2-k}$ on a :

$$b_{n+1} = -\frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^n \binom{n+2}{k} b_k$$

- (c) D'après la question précédente on a :

$$b_4 = -\frac{1}{5} (b_0 + 5b_1 + 10b_2 + 10b_3)$$

et d'après le calcul fait à la question 3.(a) on a

$$b_4 = -\frac{1}{30}$$