Lycée Condorcet
PCSI

Mai 2024

Applications linéaires

Dans cette feuille d'exercices, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Noyau, image, rang et théorème du rang

Exercice 1.
Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$u_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+3z, 4x+5y+6z, 7x+8y+9z) \end{array}$$

$$u_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+2y+3z+1, 4x+5y+6z, 7x+8y+9z-1) \end{array} \qquad u_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (yz, zx, xy) \end{array}$$

$$u_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (1, x-y) \end{array} \qquad u_5 : \begin{array}{ccc} \mathcal{A}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(0)+3f(1) \end{array} \qquad u_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & |P(1)| \end{array}.$$

Exercice 2.
Préciser le noyau et l'image des applications linéaires suivantes (on peut décrire chacun des espaces par des équations, ou donner une base, ou les deux).

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f_1(x,y) = (x-2y\ ,\ x+9y)$.
2. $f_2 : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ telle que : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{C}^3,\ f_2(x,y,z) = (x+5y-3z\ ,\ 6x-45y-3z)$.
3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que : $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f_3(x,y,z) = (x-2y+z\ ,\ x+3y-4z\ ,\ x+y-2z)$.

Exercice 3.
Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et f l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & AM - MA \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 4.
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. On suppose que A est inversible.
   (a) Montrer que f est injective.
   (b) L'application f est-elle surjective ?
3. On suppose que f est surjective . Montrer que A est inversible.

Exercice 5.
On considère l'application h définie par :

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & \big(P(0), P'(0), P''(0)\big) \end{array}$$

1. Montrer que h est linéaire.
2. Déterminer une base de l'image.
3. L'application est-elle bijective ?

Exercice 6.
Soit Δ l'application de $\mathbb{R}[X]$ vers $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], \quad \Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

1. Préciser le degré de $\Delta(P)$ en fonction du degré de P.
2. Montrer que Δ est linéaire et préciser son noyau.
3. Montrer que Δ induit un isomorphisme d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}[X]$ à déterminer sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 7.
Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_4[X]$, notons respectivement $u(P)$ et $v(P)$ le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $X^2 - 3X + 2$. On définit ainsi deux applications $u : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_2[X]$ et $v : \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}_1[X]$.

1. Justifier l'affirmation de l'énoncé selon laquelle u est à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$ et v est à valeurs dans $\mathbb{R}_1[X]$.
2. Montrer que u et v sont linéaires.
3. Donner le noyau et l'image de u (on donnera un base de chacun de ces espaces).
4. Donner le noyau et l'image de v (on donnera un base de chacun de ces espaces).

Exercice 8.
Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles. Soit f l'application qui à une suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associe la suite $v = f(u)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = u_{n+1} - 2u_n$.

1. (a) Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n$. Déterminer $f(u)$.
   (b) Soit u la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 3 \times 2^n + 1$. Déterminer $f(u)$.
2. Montrer que f est un endomorphisme de E.
3. Déterminer son noyau.

2 Manipulation des définitions de noyau et image

Exercice 9.
Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1. Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.
   Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.
2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $f\big(\mathrm{Ker}(g \circ f)\big) = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$.
3. Soit f une **forme** linéaire sur E, **non nulle** (i.e. $f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et $f \neq 0$). Montrer que f est surjective.

Exercice 10.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^2 - 5f + 6Id_E = 0_{\mathcal{L}}$. Montrer que :

$$E = \ker(f - 2Id_E) \oplus \ker(f - 3Id_E)$$

Corrigé :
Notons que, comme $f^2 - 5f + 6Id_E = 0_{\mathcal{L}}$,

$$E = \ker(f^2 - 5f + 6Id_E)$$

IL suffit donc maintenant de montrer que

$$\ker(f^2 - 5f + 6Id_E) = \ker(f - 2Id_E) \oplus \ker(f - 3Id_E)$$

Notons $E_2 = \ker(f - 2Id_E)$ et $E_3 = \ker(f - 3Id_E)$. *Vous verez l'année prochaine que cest sous-espaces vectoriels sont appelés les sous-espaces propres de f et 2 et 3 sont les valeurs propres de f.*
On procède par analyse synthèse.
Soit $x \in \ker(f^2 - 5f + 6Id_E)$
Analyse.
Supposons qu'il existe $(x_2, x_3) \in E_2 \times E_3$ tel que

$$x = x_2 + x_3 \qquad (1)$$

Comme $x_2 \in E_2$, alors $f(x_2) = 2x_2$ de même comme $x_3 \in E_3$, $f(x_3) = 3x_3$. Ainsi

$$f(x) = f(x_2 + x_3) = f(x_2) + f(x_3) = 2x_2 + 3x_3 \qquad (2)$$

Avec des combinaisons linéaires de (1) et (2) on obtient :

$$x_2 = -f(x) + 3x$$

$$x_3 = f(x) - 2x$$

Ainsi si une telle décomposition existe elle est unique.
Synthèse.
Nontons x_2 et x_3 les vecteurs de E définis par :

$$x_2 = -f(x) + 3x, \qquad x_3 = f(x) - 2x$$

On a

$$x_2 + x_3 = -f(x) + 3x + f(x) - 2x = x$$

Montrons maintenant que $x_2 \in \ker(f - 2Id)$ et $x_3 \in \ker(f - 3Id)$.
Pour ce faire nous allons montrer que $f(x_2)2 = 2x_2$ et $f(x_3) = 3x_3$). On a, par définition :

$$f(x_2) = f(-f(x) + 3x)$$

ET comme f est linéaire on a :

$$f(x_2) = -f(f(x)) + 3f(x)$$

Mais rappelons que $x \in \ker(f^2 - 5f + 6Id_E)$ c'est à dire que

$$f^2(x) - 5f(x) + 6x = 0$$

et donc

$$-f^2(x) + 3f(x) = -2f(x) + 6x$$

Ainsi

$$f(x_2) = 2(-f(x) + 3x) = x_2$$

Un raisonnement similaire nous permet de montrer que $f(x_3) = x_3$.
On a donc bien

- $x = x_2 + x_3$
- $x_2 \in \ker(f - 2Id)$

— $x_3 \in \ker(f - 3Id)$

Ainsi on a montré par analyse synthèse que

$$\ker(f^2 - 5f + 6Id_E) = \ker(f - 2Id_E) \oplus \ker(f - 3Id_E)$$

Et donc

$$E = \ker(f - 2Id_E) \oplus \ker(f - 3Id_E)$$

Exercice 11.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ telq eu $Im(u) = \ker(u)$ si et seulement si n est pair.
Montrer qu'alors pour un tel $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe une base de E de la forme :

$$(e_1, e_2, \cdots, u(e_1), u(e_2), \cdots, u(e_n))$$

Exercice 12.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient f et g deux endomorphismes de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $f \circ g \in GL(E)$.
2. f est surjective, g est injective, et $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(g)$.
3. f est surjective, g est injective, $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g \circ f \circ g \circ f)$, et $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(g \circ f \circ g \circ f)$.

Exercice 13. (Noyaux itérés)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $n_k = \ker(u^k)$ et $I_k = \Im(u^k)$.

1. Montrer que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante (pour l'inclusion), et que $(i_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante (toujours pour l'inclusion).
2. Montrer que $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ croît strictement jusqu'à un certain rang n_0 à partir duquel elle est stationnaire.
3. Montrer que dans ce dernire cas, $N_{n_0} \cap I_{n_0} = \{0\}$.

3 Projections et symétries

Exercice 14.
Soit E_1 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ défini par : $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.
Soit E_2 le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par $(1, 2, 1)$.

1. **Montrer que E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.**
2. **Notons p la projection sur E_1 parallèlement à E_2, et q la projection sur E_2 parallèlement à E_1. Exprimer, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $p(x, y, z)$ et $q(x, y, z)$ en fonction de x, y, z.**
3. **Écrire le vecteur $(2, 2, 3)$ comme somme d'un vecteur de E_1 et d'un vecteur de E_2.**
4. **Donner l'expression de la symétrie s par rapport à E_1 parallèlement à E_2.**

Corrigé :

1. Le vecteur $u_2 = (1, 2, 1)$ n'appartient pas à E_1 car ces coordonnées ne vérfient pas l'équation définissant E_1 ainsi, comme E_1 est un sous-espace vectoriel, si $\lambda \neq 0$ alors λu_1 n'est pas un élément de E_2. On a donc $E_1 \cap E_2 = \{(0, 0, 0)\}$

$$\boxed{\text{La somme de } E_1 \text{ et } E_2 \text{ est donc directe.}}$$

Comme la dimension de E_2 est égal à 1, que la dimension de $\mathbb{R}^3$ est 3 et que la somme est directe on a

$$\dim(E_1) \leq 2$$

Par ailleurs les vecteurs $(1,-1,0)$ et $(1,0,1)$ sont des éléments de E_2 qui forment une famille libre (c'est une famille de cadinal 2 et ils ne sont pas colinéaires) alors

$$\dim(E_1) \geq 2$$

Ainsi la dimension de E_2 est égal à 2. On a donc

$$\boxed{\dim(E_1) + \dim(E_2) = \dim(\mathbb{R}^3)}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2}$$

2. Pour calculer les expressions explicites de p et q il faut exprimer la décomposition de d'un élément (x,y,z) sur la somme $E_1 \oplus E_2$.
Soit dont $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
Notons x_1 et x_2 les éléments de E_1 et E_2 tels que

$$(x,y,z) = x_1 + x_2$$

D'après la question précédente les vecteurs $(1,-1,0)$ et $(1,0,1)$ forment une base de E_1. Il existe donc deux réels λ_1 et λ_2 tels que

$$x_1 = \lambda_1(1,-1,0) + \lambda_2(1,0,1)$$

De même comme $x_2 \in E_2$ il existe $\lambda_3 \in \mathbb{R}$ tel que

$$x_2 = \lambda_3(1,2,1) = (\lambda_3, 2\lambda_3, \lambda_3)$$

On obtient ainsi le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccc} \lambda_1 & +\lambda_2 & +\lambda_3 & = & x \\ -\lambda_1 & & +2\lambda_3 & = & y \\ & \lambda_2 & +\lambda_3 & = & z \end{array}\right.$$

En résolvant ce système on obtient :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \lambda_1 & = & x-z \\ \lambda_2 & = & -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z \\ \lambda_3 & = & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z \end{array}\right.$$

D'où

$$x_1 = (x-z)\Big(1,-1,0\Big) + (-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z)\Big(1,0,1\Big)$$

On a donc

$$x_1 = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, -x+z, -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z\right)$$

On a de même

$$x_2 = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z, x+y-z, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right)$$

Or par définition l'application p est définie par

$$p: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,y,z) & \longmapsto & x_1 \end{array} \qquad q: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,y,z) & \longmapsto & x_2 \end{array}$$

D'où

$$\boxed{p: \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & E \\ (x,y,z) & \longmapsto & \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z, -x+z, -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}z\right) \end{array}}$$

$$\boxed{q: \begin{array}{ccl} E & \longrightarrow & E \\ (x,y,z) & \longmapsto & \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z, x+y-z, \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z\right) \end{array}}$$

Ici j'ai utilisé la base de E_1. Vous pouvez utiliser directement l'équation qui définie E_1. Pour cela, il faut écrire $x_1 = (x',y',z')$ avec $x'+y'-z'=0$. Vous obtenez alors un système avec quatre inconnues x', y', z' et λ et quatre équations. Il ne faut pas oublier l'équation $x'+y'-z'=0$.

3. D'après la question précédente
$$p(2,2,3) = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{2}\right) \text{ et } q(2,2,3) = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{2}\right)$$
Ainsi la décomposition de $(2,2,3)$ sur $E_1 \oplus E_2$ est
$$\boxed{(2,2,3) = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{2}\right)}$$
4. On a $s = p - q$. *Je vous laisse faire le calcul....*

Exercice 15.
Soit
$$p : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}z \ , \ y \ , \ -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z \right) \end{array}.$$
Montrer que p est une projection, et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice 16.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Notons p la projection sur E_1 parallèlement à E_2, et q la projection sur E_2 parallèlement à E_1.
Montrer que $p + q = \mathrm{Id}_E$, $p \circ q = 0$, $q \circ p = 0$.

Exercice 17.
Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Soient p et q deux **projecteurs** de E tels que $p \circ q = q \circ p$, et $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Im}(q)$.
Montrer que $p = q$.

Exercice 18.
Soit $A \in \mathbb{R}[X]$, $A \neq 0$. On considère l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ qui à P associe le reste de la division euclidienne de P par A. Montrer que f est un projecteur et déterminer son image et son noyau.

Exercice 19.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et p un projecteur de E. Montrer que
1. $Id_E - p$ est un projecteur.
2. $\forall \lambda \in \mathbb{R}^* \backslash \{1\}$, $p - \lambda Id_E$ est un automorphisme.

4 Endomorphismes nilpotents

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit u un endomorphisme de E. On dit que u est **nilpotent** si
$$\exists p \in \mathbb{N}, \quad u^p = 0$$
L'ensemble des entiers p vérifiant $u^p = 0$ est alors non vide et minoré par 0, il admet donc un plus petit élément. Cet entier est appelé **l'indice de nilpotence** de u.

Exercice 20.
Soit E un espace vectoriel de dimension finie tel que :
$$\forall x \in E, \quad \exists p_x \in \mathbb{N}, \quad u^{p_x}(x) = 0.$$
Montrer que u est un endomorphisme nilpotent.
Ce résultat est-il vrai si on ne suppose plus E de dimension finie ?

Exercice 21.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et u un endomorphisme de E nilpotent d'indice de nilpotence 2 $(u \circ u = 0)$.

1. Donner un exemple non trivial d'une telle application u pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
2. Montrer qu'il existe une application linéaire f de E vers $\mathbb{K}$ et a un élément de E tels que

$$\forall x \in E, \quad u(x) = f(x)a$$

Exercice 22.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence p.

1. **Soit $x_0 \in E \setminus \ker(f^{p-1})$. Montrer que la famille $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{p-1}(x_0))$ est libre.**
2. **En déduire que $f^n = 0$.**
3. **Soit $g \in GL(E)$ tel que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $f + g \in GL(E)$.**

Corrigé :

1. Soit $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$\lambda_1 x_0 + \lambda_2 f(x_0) + \cdots + \lambda_p f^{p-1}(x_0) = 0 \qquad (1)$$

Notons que, comme $x_0 \in E \setminus \ker(f^{p-1})$ alors $f^{p-1}(x_0) \neq 0$. Et comme $f^p = 0$ et f est linéaire, pour tout $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq p$, $f^k(x_0) = 0$.
On applique alors f^{p-1} à l'égalité (1). On obtient alors par linéarité de f :

$$\lambda_1 f^{p-1}(x_0) + \lambda_2 f^p(x_0) + \cdots + \lambda_p f^{2p-1}(x_0) = 0$$

Ainsi d'après ce qui précéde on a

$$\lambda_1 f^{p-1}(x_0) = 0$$

Mais comme $f^{p-1}(x_0) \neq 0$ alors

$$\boxed{\lambda_1 = 0}$$

On applique alors f^{p-2} à l'égalité

$$\lambda_2 f(x_0) + \cdots + \lambda_p f^{p-1}(x_0) = 0$$

et on obtient

$$\lambda_2 f^{p-1}(x_0) + \cdots + \lambda_p f^{2p-2}(x_0) = 0$$

Et on en déduit par le même raisonnement que ci-dessus :

$$\boxed{\lambda_2 = 0}$$

En itérant ce raisonnement p fois on obtient :

$$\boxed{\lambda_1 = 0, \cdots, \lambda_p = 0}$$

$$\boxed{\text{La famille } \Big(x_0, f(x_0), \cdots, f^{p-1}(x_0)\Big) \text{ est donc libre.}}$$

2. Si on avait $p \geq n$ et donc $f^n \neq 0$. La famille $\Big(x_0, f(x_0), \cdots, f^{p-1}(x_0)\Big)$ serait libre.Ce serait donc une famille libre de cardial $n+1$ dans un espace vectoriel de dimension n. D'où la contradiction. On a donc bien :

$$\boxed{f^n = 0}$$

3. Comme f et g commutent, on a l'égalité

$$g^p - (-f)^p = (g+f) \circ \sum_{k=0}^{p-1} g^k \circ (-f)^{n-1-k}$$

Mais comme f est linéaire on a,

$$(-f)^p = (-1)^p f^p$$

et comme f est nilpotent d'indice de nilpotence p on a :

$$(-f)^p = 0$$

De plus, comme g admet une application réciproque alors g^p aussi et on a :

$$(g^p)^{-1} = (g^{-1})^p$$

On a alors

$$Id = g^p \circ (g^{-1})^p = (g+f) \circ \left(\sum_{k=0}^{p-1} g^k \circ (-f)^{n-1-k} \right) \circ (g^{-1})^p$$

$$\boxed{\text{L'application } f+g \text{ est donc inversible d'inverse } \left(\sum_{k=0}^{p-1} g^k \circ (-f)^{n-1-k} \right) \circ (g^{-1})^p}$$