

Intégration sur un segment Corrections

Sommes de Riemann

Exercice 1.

Montrer que les suites suivantes sont convergentes, et trouver leur limite.

$$a) \quad u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{n^{3/2}} \quad b) \quad v_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{2n} \quad c) \quad w_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \quad d) \quad t_n = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{k}{n} \right) \right)^{\frac{1}{n}}$$

Suites et intégrales

Exercice 2.

1. Calculer, pour tout $n \geq 2$, $\int_2^n \frac{1}{x \ln x} dx$.
2. Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\int_k^{k+1} \frac{1}{x \ln x} dx \leq \frac{1}{k \ln k}$.
3. On pose $S_n = \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k \ln k}$. Montrer que $S_n \rightarrow_{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

Exercice 3.

1. Justifier que : $\forall t \in [0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n t^k = \frac{1}{1-t} - \frac{t^{n+1}}{1-t}$.

En déduire que : $\forall x \in [0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \ln(1-x) = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{t-1} dt$.

2. En déduire que : $\forall x \in [0, 1[, \forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \ln(1-x) \right| \leq \frac{x^{n+2}}{(n+2)(1-x)}$

puis que : $\forall x \in [0, 1[, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$

Correction :

1. Soit $t \in [0, 1[$, et soit $n \in \mathbb{N}$, comme $t \neq 1$ on a, d'après la formule du cours :

$$\sum_{k=0}^n t^k = \frac{1-t^{n+1}}{1-t}$$

L'égalité cherchée découle immédiatement.

Soit $x \in [0, 1[$, et soit $n \in \mathbb{N}$, comme l'égalité précédente est vraie pour tout $t \in [0, x[$, on a, en intégrant :

$$\int_0^x \sum_{k=0}^n t^k = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt - \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t} dt \iff \sum_{k=0}^n \int_0^x t^k - [-\ln(1-t)]_0^x = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{t-1} dt$$

La deuxième partie est obtenue par linéarité de l'intégrale. On en déduit que l'égalité suivante est vraie

$$\sum_{k=0}^n \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^x + \ln(1-x) = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{t-1} dt \iff \sum_{k=0}^n \frac{x^{k+1}}{k+1} + \ln(1-x) = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{t-1} dt$$

Enfin on procède au changement d'indice $k' = k + 1$ dans la somme et comme les variables sont muettes on en déduit l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \ln(1-x) = \int_0^x \frac{t^{n+1}}{t-1} dt$$

2. Soit $x \in [0, 1[$ et soit $n \in \mathbb{N}$, D'après la question précédente on a :

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} \frac{x^k}{k} + \ln(1-x) \right| = \left| \int_0^x \frac{t^{n+1}}{t-1} dt \right|$$

Or d'après le cours :

$$\left| \int_0^x \frac{t^{n+1}}{t-1} dt \right| \leq \int_0^x \left| \frac{t^{n+1}}{t-1} \right| dt$$

Notons tout d'abord que pour tout $t \in [0, x[$, $0 \leq t < 1$ d'où $\frac{t^{n+1}}{t-1} \leq 0$, on a donc :

$$\left| \frac{t^{n+1}}{t-1} \right| = \frac{t^{n+1}}{1-t}$$

Or les applications $t \mapsto t^{n+1}$ et $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ sont croissantes et positives sur $[0, x]$, ainsi par produit, l'application $x \mapsto \frac{t^{n+1}}{1-t}$ est croissante sur $[0, x]$. Ainsi on a :

$$\max_{t \in [0, x]} \left| \frac{t^{n+1}}{t-1} \right| = \frac{x^{n+1}}{x-1}$$

D'après la formule de la moyenne on a donc :

$$\left| \int_0^x \frac{t^{n+1}}{t-1} dt \right| \leq \frac{x^{n+1}}{x-1} \cdot x$$

On a donc bien l'inégalité cherchée.

Le théorème d'encadrement permet de conclure.

Exercice 4. Attention aux interversion limite et intégrale !

1. On suppose ici qu'on a $x \in [0, 1]$. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} nxe^{-nx^2}$.
2. Calculer $I_n = \int_0^1 nxe^{-nx^2} dx$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
3. Que peut-on en déduire ?

Exercice 5.

Pour tout entier naturel n , on pose

$$u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x^2} dx$$

1. Calculer u_0 (on pourra écrire $\frac{1}{1-x^2}$ sous la forme $\frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$). Puis calculer u_1 .
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n - u_{n+2} = \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}$$

En déduire u_2 et u_3 .

- Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{4}{3(n+1)2^{n+1}}$$

Que peut-on en conclure ?

Exercice 6.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2} t \, dt$.

- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} + t_n = \frac{1}{2n+3}$.
- Étudier la monotonie de la suite $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} nt_n$ (tout en justifiant que cette limite existe).

Exercice 7. Intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$.

- Calculer W_0 et W_1 .
- Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}$.
En déduire une relation de récurrence entre W_{n+2} et W_n .
- Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$.
- On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (n+1)W_{n+1}W_n$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et préciser sa valeur.
- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$ et en déduire que $W_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} W_n$.
- Montrer que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Correction :

- On a

$$W_0 = \frac{\pi}{2}, \quad W_1 = 1$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$, calculons $W_{n+1} - W_n$, on a :

$$W_{n+1} - W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t (\cos t - 1) \, dt$$

Or pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\cos^n t \geq 0, \text{ et } \cos t - 1 \leq 0$$

Ainsi pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\cos^n t (\cos t - 1) \leq 0$$

Ainsi, par positivité de l'intégrale ($0 \leq \frac{\pi}{2}$) on a

$$W_{n+1} - W_n \leq 0$$

La suite est donc décroissante.

Or, par positivité de l'intégrale on montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \leq 0$.

La suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée, d'après le théorème de la limite monotone elle converge.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$W_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t \, dt$$

On procède à une intégration par partie. On note u et v les applications de classe $\mathcal{C}^1$ définies pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par

$$\begin{aligned} u(t) &= \cos^{n+1} t & u'(t) &= -(n+1) \sin t \cos^n t \\ v'(t) &= \cos t & v(t) &= \sin t \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= [\sin t \cos^{n+1} t]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t \, dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t) \cos^n t \, dt \\ &= (n+1)[W_n - W_{n+2}] \end{aligned}$$

On a donc bien pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}}$$

Ce qui est équivalent à

$$(n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ (comme $n+2 \neq 0$),

$$\boxed{W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n}$$

4. Procédons à une récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note P_n l'égalité

$$W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2}$$

D'après la question 1 on a $W_0 = \frac{\pi}{2}$, or

$$\frac{0!}{(1 \times 0!)^2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

L'égalité P_0 est donc vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons P_n vraie et déduisons en P_{n+1} . D'après la question 3, on a

$$W_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} W_{2n}$$

Ainsi comme P_n est supposé vraie on a

$$\begin{aligned} W_{2n+2} &= \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{2n+2}{2n+2} \times \frac{2n+1}{2n+2} \times \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{2^2 (n+1)^2 (2^n n!)^2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{(2n+2)!}{(2^{n+1} (n+1)!)^2} \times \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie.

Le principe de récurrence permet ainsi de montrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a, par définition de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$,

$$u_{n+1} - u_n = (n+2)W_{n+2}W_{n+1} - (n+1)W_{n+1}W_n$$

Ainsi d'après la question 3 on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1)W_nW_{n+1} - (n+1)W_{n+1}W_n \\ &= 0 \end{aligned}$$

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc constante et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = u_0 = \frac{\pi}{2}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, on a

$$W_{n+2} \leq W_{n+1} \leq W_n$$

Mais, d'après la question 3, on a

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n$$

d'où

$$\frac{n+1}{n+2}W_n \leq W_{n+1} \leq W_n$$

Or l'app

Exercice 8.

1. (a) Montrer que, pour tout $k \geq 2$, $\int_{k-1}^k \ln t \, dt \leq \ln k \leq \int_k^{k+1} \ln t \, dt$
 (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $\int_1^n \ln t \, dt \leq \ln(n!) \leq \int_1^n \ln t \, dt + \ln n$
2. Pour tout $x > 0$, calculer $F(x) = \int_1^x \ln(t) \, dt$.
3. En déduire que $\ln(n!)$ est équivalent à $n \ln n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Fonctions définies par une intégrale

Exercice 9.

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \varphi(a) = \int_0^1 \sqrt{1-x^a} dx$.

1. Montrer que φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que : $\forall \alpha \in]0, 1[, 1 - \alpha < \sqrt{1-\alpha} < 1 - \frac{\alpha}{2}$.
3. Montrer que : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \frac{a}{a+1} < \varphi(a) < \frac{a+1/2}{a+1}$.

Exercice 10.

On considère la fonction définie par $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^4} dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F , et préciser son signe en fonction de x .
2. Étudier la parité de F .
3. Justifier que F est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variations. Retrouver le signe de F .

Exercice 11.

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_x^{2x} \exp(-t^2) dt$.

1. (a) Justifier que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.
(b) Montrer que g est une fonction impaire.
(c) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .
2. (a) Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2e^{-4x^2} - e^{-x^2}$.
(b) Dresser le tableau de variations de g . On précisera $g(0)$.
(c) Montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, x \exp(-4x^2) \leq g(x) \leq x \exp(-x^2).$$

En déduire la limite de g en $+\infty$, puis en $-\infty$.