# Généralisation de la notion d'hyperplan en dimension infinie

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $\varphi \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$, non nulle. On peut parler de l'application linéaire $\varphi$ comme d'une *forme linéaire*. Nous allons démontrer que son noyau est supplémentaire avec toute droite qu'il ne contient pas.

Soit $a$ un vecteur de $E$ tel que $\varphi(a) \neq 0$.

1. Dans cette question (et seulement dans celle-ci), on suppose $E$ de dimension finie. Démontrer que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est de dimension $n-1$ et justifier que $\ker(\varphi)$ et $\mathrm{Vect}(a)$ sont supplémentaires dans $E$.
2. Retour au cas général. Prouver à nouveau, cette fois sans l'aide de la dimension, que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $\mathrm{Vect}(a)$ sont supplémentaires dans $E$.
3. Supposons que $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et notons $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(\pi/2) = 0\}$.
   Démontrer que $F$ et $\mathrm{Vect}(\sin)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $E$.
4. Supposons que $E$ est l'ensemble des suites réelles convergentes.
   Justifier qu'il s'agit d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit Soit
   $$G = \{(u_n)_{n \geq 0} \in E : \lim u_n = u_0\}.$$
   Justifier que $G$ est un sous-espace vectoriel de $E$ et en donner un supplémentaire.

## Corrigé

1. Puisque $\mathrm{Im}(\varphi) \subset \mathbb{K}$, on a $\mathrm{rg}(\varphi) \in \{0, 1\}$. Or, $\varphi$ n'est pas l'application nulle : son image n'est pas réduite à $\{0\}$. Ainsi, le rang de $\varphi$ vaut 1. D'après le théorème du rang,
   $$\dim \mathrm{Ker}(\varphi) = \dim E - \mathrm{rg}(\varphi) = n - 1.$$
   Notons $D = \mathrm{Vect}(a)$. Puisque $\varphi(a) \neq 0$, $a \neq 0_E$. Ainsi, $\mathrm{Vect}(a)$ est une droite. On $\mathrm{Vect}(a) \cap \mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Vect}(a)$ donc la dimension de $\mathrm{Vect}(a) \cap \mathrm{Ker}(\varphi)$ est inférieure à 1. Si elle était égale à 1, on aurait que $\mathrm{Vect}(a) = \mathrm{Vect}(a) \cap \mathrm{Ker}(\varphi) \subset \mathrm{Ker}(\varphi)$ ce qui n'est pas puisque $\varphi(a) \neq 0$. On a donc
   $$\begin{cases} \mathrm{Vect}(a) \cap \mathrm{Ker}(\varphi) = \{0_E\} \\ \dim \mathrm{Vect}(a) + \dim \mathrm{Ker}(\varphi) = 1 + (n-1) = n = \dim E \end{cases}$$
   D'après une caractérisation des supplémentaires en dimension finie, $\mathrm{Vect}(a)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$ sont supplémentaires dans $E$.
2. Procédons par analyse-synthèse. Soit $x \in E$.
   • Supposons qu'il existe $x_1 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ et $x_2 \in \mathrm{Vect}(a)$ tels que
   $x = x_1 + x_2$. On sait alors qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $x_2 = \lambda a$. Appliquons $\varphi$ :
   $$\varphi(x) = \varphi(x_1 + \lambda a) = \varphi(x_1) + \lambda\varphi(a) = 0 + \lambda\varphi(a).$$
   Puisque $\varphi(a) \neq 0$, on a $\lambda = \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)}$ et donc
   $$x_2 = \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a \quad \text{et} \quad x_1 = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a.$$
   • Posons $x_1 = x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$ et $x_2 = \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a$. Il est clair que $x = x_1 + x_2$ et que $x_2 \in \mathrm{Vect}(a)$. On a, de plus,
   $$\varphi(x_2) = \varphi\left(x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} a\right) = \varphi(x) - \frac{\varphi(x)}{\varphi(a)} \varphi(a) = 0,$$
   de sorte que $x_1 \in \mathrm{Ker}(\varphi)$.
   • Notre vecteur $x$ de départ s'écrit donc de manière unique comme somme d'un élément de $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et de $\mathrm{Vect}(a)$ : on a redémontré, cette fois sans hypothèse sur la dimension, que
   $$E = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}(a).$$
3. Soit
   $$\varphi : \begin{cases} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \to & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(\pi/2) \end{cases}.$$
   Il est notoire que l'évaluation des fonctions est linéaire : $\varphi$ est une forme linéaire. On a $F = \ker(\varphi)$. De plus, $\varphi(\sin) = \sin \pi/2 = 1 \neq 0$. D'après ce qui précède,
   $$\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathrm{Ker}(\varphi) \oplus \mathrm{Vect}(\sin) = F \oplus \mathrm{Vect}(\sin).$$

4. L'ensemble $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, espace vectoriel des suites réelles. En effet, la suite nulle est convergente, donc appartient à $E$, et une combinaison linéaire de suites convergentes est une suite convergente. Comme sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Posons

$$\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \lim u_n - u_0 \end{array} \right. .$$

On pourrait montrer facilement que $\psi$ est linéaire. Ainsi,

$$G = \{(u_n)_{n \geq 0} \in E : \psi(u) = 0\} = \ker(\psi).$$

On souhaite définir une suite $a =$ de $E$ telle que $\psi(a) \neq 0$. Posons par exemple : $a = \left(\frac{1}{n+1}\right)_{n \in \mathbb{N}}$. Elle est dans $E$ puisqu'elle converge vers 0 et $\psi(a) = 0 - a_0 = -1 \neq 0$. D'après la question b,

$$E = \mathrm{Ker}(\psi) \oplus \mathrm{Vect}(a).$$