Intégrales de *Wallit*

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, \mathrm{d}x$.

1. À l'aide d'un changement de variable, démontrer que pour tout n, I_n vaut $\displaystyle\int_0^1 \frac{u^n}{1+u^2} \mathrm{d}x$.
   Dans la suite, on pourra travailler avec celle des deux expressions de I_n que l'on préfère.
2. Calculer I_0 et I_1.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.
4. Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.
   Justifier alors pour un entier naturel n quelconque l'inégalité $2I_{n+2} \leq I_n + I_{n+2} \leq 2I_n$.
   En déduire que la suite (I_n) tend vers 0.
5. Prouver que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (-1)^n I_{2n} = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} \quad \text{et} \quad (-1)^n I_{2n+1} = \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k}.$$
6. En déduire la valeur des nombres
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1}.$$

Corrigé

1. C'est bien sûr le changement de variable $u = \tan(x)$, tan étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ qu'il faut utiliser, éventuellement en écrivant le tableau ci-dessous.

u	$\tan x$
$\mathrm{d}u$	$(1+\tan^2 x)\mathrm{d}x$
$\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u$	$\mathrm{d}x$
$u = 0$	$x = 0$
$u = 1$	$x = \frac{\pi}{4}$

2. $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$ et $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\mathrm{d}x = [-\ln(\cos x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0 = \frac{\ln(2)}{2}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par linéarité de l'intégrale, on a
$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\tan^2 x)\tan^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan' x \cdot \tan^n x\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}(\tan x)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}.$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x - 1)\tan^n(x)\mathrm{d}x.$$
   Sur $[0, \frac{\pi}{4}]$, tan est positive et $\tan x \leq \tan\frac{\pi}{4} = 1$, d'où $1 - \tan x \leq 0$. On est donc en train d'intégrer une fonction continue et négative sur un segment. Cela assure que $I_{n+1} - I_n \leq 0$; la suite (I_n) est bien décroissante. Pour un entier n donné, on a donc $I_{n+2} \leq I_n$ donc d'une part $I_{n+2} + I_n \leq I_n + I_n$ et $I_{n+2} + I_{n+2} \leq I_n + I_{n+2}$, ce qui donne l'encadrement voulu. Pour en déduire que (I_n) tend vers 0, on va croiser les inégalités, pour obtenir
$$\forall n \geq 2 \qquad I_n + I_{n+2} \leq 2I_n \leq I_{n-2} + I_n \quad \text{i.e.} \quad \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{2(n-1)}.$$
   Par encadrement, on a bien $I_n \to 0$.
5. Procédons par récurrence en notant, pour un entier naturel n :
$$\mathcal{P}_n : \quad \text{« } (-1)^n I_{2n} = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} \quad \text{et} \quad (-1)^n I_{2n+1} = \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k}. \text{ »}$$
   - $(-1)^0 I_{2\cdot 0} = I_0 = \frac{\pi}{4} + \sum\limits_{k=1}^{0} \frac{(-1)^k}{2k-1}$ d'après la question 2. De plus $(-1)^0 I_{2\cdot 0+1} = I_1 = \frac{\ln(2)}{2} + \sum\limits_{k=1}^{0} \frac{(-1)^k}{2k}$. La proposition $\mathcal{P}_0$ est donc vraie.

• Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}_n$. Montrons $\mathcal{P}_{n+1}$. Dans les calculs qui suivent, on utilise la question précédente en écrivant les relations $I_{2n} + I_{2n+2} = \frac{1}{2n+1}$ et $I_{2n+1} + I_{2n+3} = \frac{1}{2n+2}$.

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+1} I_{2(n+1)} = (-1)^{n+1} I_{2n+2} &= (-1)^n \cdot (-1) \cdot \left(\frac{1}{2n+1} - I_{2n} \right) \\
&= (-1)^n I_{2n} - (-1)^n \frac{1}{2n+1} \\
&\underset{\mathcal{P}_n}{=} \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)-1} \\
&= \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k-1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(-1)^{n+1} I_{2(n+1)+1} = (-1)^{n+1} I_{2n+3} &= (-1)^{n+1} \cdot (-1) \cdot \left(\frac{1}{2n+2} - I_{2n+1} \right) \\
&= (-1)^n I_{2n+1} - (-1)^n \frac{1}{2n+2} \\
&\underset{\mathcal{P}_n}{=} \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k} + \frac{(-1)^{n+1}}{2(n+1)} \\
&= \frac{\ln(2)}{2} + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{2k}.
\end{aligned}$$

On a prouvé que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

• D'après le principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

6. Soit un entier $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente, $(-1)^n I_{2n+1} = \frac{\ln(2)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$, d'où

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -2 \cdot \frac{\ln(2)}{2} + 2 \cdot (-1)^n \cdot I_{2n+1}.$$

On a prouvé en question 4 que $I_n \to 0$. On a donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$.

De la même façon, on a $(-1)^n I_{2n} = \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1}$, donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{2k-1} = -\frac{\pi}{4} - (-1)^n I_{2n}.$$

Puisque $I_n \to 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} = -\frac{\pi}{4}$.