Lycée Condorcet PCSI

26 mai 2025

Devoir surveillé
Mathématiques

4 heures

Problème 1. Probabilité

Dans tout l'exercice, on considère deux urnes U et V, qui contiennent des boules blanches et noires, et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on introduit les événements B_k : "le k ième tirage donne une boule blanche", et N_k :" le k-ième tirage donne une boule noire".

Expérience 1
Dans cette expérience, l'urne U contient 1 boule blanche et $n-1$ boules noires (avec $n \geq 2$) et on effectue des tirages **sans remise** dans l'urne U jusqu'à obtenir la boule blanche. On note N le nombre maximal de tirages effectués et on introduit, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, D_k " on a obtenu la boule blanche au k-ième tirage".

1. Dans cette question, on suppose $n = 3$ donc l'urne U contient 1 boule blanche et 2 boules noires.
   (a) Déterminer N.
   (b) Décrire D_1, D_2 et D_3 à l'aide des B_k puis calculer $P(D_1)$, $P(D_2)$ et $P(D_3)$.
2. On revient au cas général : déterminer N, puis, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, décrire D_k et calculer $P(D_k)$.

Expérience 2
Dans cette expérience, la proportion de boules blanches dans l'urne U est $2/3$, et celle dans l'urne V est $1/3$. On choisit au hasard une urne (avec équiprobabilité), puis on effectue des tirages **avec remise** dans cette urne.

3. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au premier tirage.
4. Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche aux premier et deuxième tirages.
5. Quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne U sachant que les deux premiers tirages ont donné une boule blanche ?

Dans les deux expériences suivantes, la proportion de boules blanches dans l'urne U est a $(0 < a < 1)$, et celle de l'urne V est b $(0 < b < 1)$.

Expérience 3
Dans cette expérience, on choisit au départ une urne au hasard (avec equiprobabilité), puis on effectue des tirages **avec remise** selon la règle suivante : si le tirage donne une boule blanche alors le tirage suivant s'effectue dans l'urne U tandis que si le tirage a donné une boule noire, le tirage suivant s'effectue dans l'urne V.

6. Déterminer $P(B_1)$.
7. A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$p_{k+1} = (a-b)p_k + b$$
   où on a noté pour tout $k \in \mathbb{N}^*, p_k = P(B_k)$.
8. Déterminer l'expression de p_k en fonction de k, puis la limite de p_k quand k tend vers l'infini.

Expérience 4
Dans cette expérience, on choisit au départ une urne au hasard (avec équiprobabilité), puis on effectue des tirages **avec remise** selon la règle suivante : si le tirage donne une boule blanche alors le tirage suivant s'effectue dans la même urne tandis que si le tirage a donné une boule noire, le tirage suivant s'effectue dans l'autre urne. On introduit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement U_k :"le k-ième tirage s'effectue dans l'urne U " et la probabilité $P(U_k) = q_k$.

9. Déterminer q_1.
10. Trouver une relation de récurrence entre q_{k+1} et q_k.
11. Exprimer alors $P(B_k)$ en fonction de a, b et q_k. *On ne demande pas de calculer q_k.*

Problème 2. Intégration (et algèbre ?)

On note $E = \mathcal{C}^0(]-1;+\infty[)$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur l'intervalle $I =]-1;+\infty[$, continues et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Étant donné un élément $f \in E$, on appelle $T(f)$ l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in I, \quad T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

Partie A : Quelques exemples.

1. Déterminer l'application $T(f)$ lorsque f est l'application constante égale à $a \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer $T(f)$ pour l'application :
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(1+t) \end{array} \right.$$
3. Déterminer $T(f)$ pour l'application :
$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t}{(t+2)^2} \end{array} \right.$$
et donner un développement limité à l'ordre 2 de $T(f)$ en $+\infty$.
4. Pour tout entier n strictement positif, on définit l'application $f_n : t \mapsto t^n$.
Soit $x \in I$.
Trouver une relation entre $T(f_{n+1})(x)$ et $T_n(f)(x)$.
En déduire une expression de $T(f_n)(x)$ à l'aide d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.
5. Vérifier que T est un endomorphisme de E et déterminer son noyau et son image.

Partie B Étude d'un cas particulier.

Cette partie est consacrée à l'étude de $T(f)$lorsque f est définie, pour tout $t \in I$, par $f(t) = e^t$. Ainsi,

$$\forall x \in I, T(f)(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

On ne cherchera pas à calculer cette inttégrale.

6. Montrer que f est croissante sur I.
7. (a) Donner le développement limité de f à l'ordre 2 en 0.
   (b) En déduire le développement limité de $T(f)$ à l'ordre 3 en 0.
   (c) Donner l'équation de sa tangente en 0 et étudier la position de la courbe par rapport à la tangente.
8. Montrer que $T(f)$ est majorée, puis que $T(f)(x)$ admet une limite quant x tend vers $+\infty$. On ne cherchera pas à calculer cette limite.
9. Déterminer la limite de $T(f)(x)$ lorsque x tend vers $(-1)^+$. On pourra pour cela établir une minoration ou une majoration de $T(f)(x)$.

Partie C Comportement en $+\infty$.

Dans cette partie, on fixe un élément $f \in E$ (pas nécessairement le même qu'en partie B) et on suppose que f admet en $+\infty$ une limite $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. On souhaite étudier le comportement de la fonction $T(f)$ en $+\infty$.

10. On suppose dans cette question que $\lambda = 0$.
   (a) Démontrer que la fonction f est bornée sur $[0;+\infty[$.
   On notera dans la suite de la question $M = \sup_{t\in[0;+\infty[} \mid f(t) \mid$.
   (b) Pour $x \geq 1$, on pose
   $$\alpha(x) = \sup\{\mid f(t) \mid, \quad t \in [\ln(x);x]\}$$
   la borne supérieure de $\mid f \mid$ sur l'intervalle $[\ln(x);x]$.
   Montrer que $\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

(c) Montrer que pour tout $x \geq 1$, on a :

$$| T(f)(x) | \leq M \int_0^{\ln x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + \alpha(x) \int_{\ln x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$$

(d) En déduire que

$$T(f)(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(\ln x)$$

11. On suppose dans cette question que $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
Trouver un équivalent simple de $T(f)(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
On pourra considérer $T(g)$, où g est définie par $g(t) = f(t) - \lambda$ pour tout $t \in I$.
12. On suppose dans cette question que $f(t) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que $T(f)(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Problème 3 : Opérateurs de translation et de différence sur les polynômes

Quelques notations. Dans tout le texte, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 1 et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de P et $\mathrm{cd}(P)$ son coefficient dominant, c'est à dire le coefficient devant $X^{\deg(P)}$.
Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0, k]\!]$, le coefficient binomial $\binom{k}{j}$ vaut $\dfrac{k!}{j!(k-j)!}$.
Pour un ensemble E et $f : E \to E$, on définit par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ l'application $f^k : E \to E$ de la façon suivante :

$$f^0 = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad f^{k+1} = f \circ f^k.$$

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel de E, et f un endomorphisme de E. On dira que F est **stable par** f si $f(F) \subset F$ autrement dit si

$$\forall x \in F \quad f(x) \in F$$

Partie A. L'opérateur de translation.

Soit l'application

$$\tau : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{array} \right. .$$

1. Pour un polynôme P non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, justifier que

$$\deg(\tau(P)) = \deg(P) \quad \text{et} \quad \mathrm{cd}\,(\tau(P)) = \mathrm{cd}(P).$$

2. Montrer que τ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Montrer que le noyau de τ est réduit à $\{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$. Justifier que τ est un automorphisme.
4. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}\ \tau^k(P) = P(X+k)$.

Partie B. L'opérateur de différence.

Dans la suite, on note δ l'endomorphisme $\delta = \tau - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$, c'est à dire

$$\delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right. .$$

5. (a) Calculer $\delta(P)$ dans le cas où P est un polynôme constant.
(b) Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\delta(P))$ et $\mathrm{cd}(\delta(P))$ en fonction de $\deg(P)$ et $\mathrm{cd}(P)$.
(c) En déduire que $\ker(\delta)$ est une droite, dont on précisera une base.
(d) Démontrer que $\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
6. (a) Démontrer :

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \quad \delta^n(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}.$$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, en écrivant la formule du binôme de Newton pour deux endomorphismes qui commutent, exprimer $\delta^n(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in [\![0, n]\!]$.

(c) En déduire que pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a l'identité

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}P(j) = 0.$$

7. Dans cette question, on cherche les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ qui sont stables par δ.

(a) Pour un polynôme non nul de degré $d \leq n$, montrer que la famille $\left(P, \delta(P), \delta^2(P), \ldots, \delta^d(P)\right)$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?

(b) En déduire que si F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par δ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in [\![0, n]\!]$ tel que $F = \mathbb{R}_d[X]$.

Partie C. Polynômes de Hilbert.

On considère la famille de polynômes

$$\begin{cases} H_0 & = 1 \\ H_k & = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(X - j) \quad \text{pour } k \in [\![1, n]\!]. \end{cases}$$

C.1. Décomposition sur la base.

8. Montrer que $(H_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
9. Calculer $\delta(H_0)$ puis montrer que pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\delta(H_k) = H_{k-1}$.
10. Montrer que pour $k, l \in [\![0, n]\!]$,

$$\delta^k(H_l)(0) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{si } k \neq l \end{cases}$$

11. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$P = \sum_{k=0}^{n} \delta^k(P)(0) H_k.$$