Lycée Condorcet 26 mai 2025
PCSI

# Devoir surveillé
# Mathématiques
4 heures

## Problème 1. Probabilité

**Dans tout l'exercice, on considère deux urnes $U$ et $V$, qui contiennent des boules blanches et noires, et, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ on introduit les événements $B_k$ : "le $k$ ième tirage donne une boule blanche", et $N_k$ :" le $k$-ième tirage donne une boule noire".**

**Expérience 1**
**Dans cette expérience, l'urne $U$ contient $1$ boule blanche et $n-1$ boules noires (avec $n \geq 2$) et on effectue des tirages sans remise dans l'urne $U$ jusqu'à obtenir la boule blanche. On note $N$ le nombre maximal de tirages effectués et on introduit, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, $D_k$ " on a obtenu la boule blanche au $k$-ième tirage".**

1. **Dans cette question, on suppose $n = 3$ donc l'urne $U$ contient $1$ boule blanche et $2$ boules noires.**
   (a) **Déterminer $N$.**
   (b) **Décrire $D_1$, $D_2$ et $D_3$ à l'aide des $B_k$ puis calculer $P(D_1)$, $P(D_2)$ et $P(D_3)$.**
2. **On revient au cas général : déterminer $N$, puis, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$, décrire $D_k$ et calculer $P(D_k)$.**

**Expérience 2**
**Dans cette expérience, la proportion de boules blanches dans l'urne $U$ est $2/3$, et celle dans l'urne $V$ est $1/3$. On choisit au hasard une urne (avec équiprobabilité), puis on effectue des tirages avec remise dans cette urne.**

3. **Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au premier tirage.**
4. **Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche aux premier et deuxième tirages.**
5. **Quelle est la probabilité d'avoir choisi l'urne $U$ sachant que les deux premiers tirages ont donné une boule blanche ?**

**Dans les deux expériences suivantes, la proportion de boules blanches dans l'urne $U$ est $a$ $(0 < a < 1)$, et celle de l'urne $V$ est $b$ $(0 < b < 1)$.**

**Expérience 3**
**Dans cette expérience, on choisit au départ une urne au hasard (avec equiprobabilité), puis on effectue des tirages avec remise selon la règle suivante : si le tirage donne une boule blanche alors le tirage suivant s'effectue dans l'urne $U$ tandis que si le tirage a donné une boule noire, le tirage suivant s'effectue dans l'urne $V$.**

6. **Déterminer $P(B_1)$.**
7. **A l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,**
$$p_{k+1} = (a-b)p_k + b$$
**où on a noté pour tout $k \in \mathbb{N}^*, p_k = P(B_k)$.**
8. **Déterminer l'expression de $p_k$ en fonction de $k$, puis la limite de $p_k$ quand $k$ tend vers l'infini.**

**Expérience 4**
**Dans cette expérience, on choisit au départ une urne au hasard (avec équiprobabilité), puis on effectue des tirages avec remise selon la règle suivante : si le tirage donne une boule blanche alors le tirage suivant s'effectue dans la même urne tandis que si le tirage a donné une boule noire, le tirage suivant s'effectue dans l'autre urne. On introduit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement $U_k$ :"le $k$-ième tirage s'effectue dans l'urne $U$ " et la probabilité $P(U_k) = q_k$.**

9. **Déterminer $q_1$.**

**10. Trouver une relation de récurrence entre $q_{k+1}$ et $q_k$.**

**11. Exprimer alors $P(B_k)$ en fonction de $a$, $b$ et $q_k$.** *On ne demande pas de calculer $q_k$.*

**Corrigé :**

1. (a) Si les deux premiers tirages ont donné une boule noire, alors avant le troisiée tirage il ne reste qu'une boule noire dans l'urne, d'où $N = 3$.

   (b) On a les égalités :

$$\boxed{D_1 = B_1, \quad D_2 = N_1 \cap B_2, \quad D_3 = N_1 \cap N_2 \cap B_3}$$

   Notons que $P(N_1 \cap N_2) \neq 0$, ainsi d'après la formule des propbabilités composées on a :

$$P(D_1) = P(B_1) = \frac{1}{3}, \quad P(D_2) = P(N_1) \times P_{N_1}(B_2), \quad P(D_3) = P(N_1) \times P_{N_1}(N_2) \times P_{N_1 \cap N_2}(B_3)$$

   Sachant que $N_1$ a été réalisé, avant le deuxième tirage l'urne est constituée d'une boule blanche et une boule noire, d'où

$$P_{N_1}(B_2) = \frac{1}{2}, \quad P_{N_1}(N_2) = \frac{1}{2}$$

   De même, si l'on sait que des boules noires ont été tirées aux deux premiers tirages alors avant le troisième tirage il ne reste plus que la boule blanche dans l'urne d'où

$$P_{N_1 \cap N_2}(B_3) = 1$$

   On a ainsi

$$P(D_2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}, \quad P(D_3) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1$$

   D'où

$$\boxed{P(D_1) = \frac{1}{3}, \quad P(D_2) = \frac{1}{3}, \quad P(D_3) = \frac{1}{3}}$$

2. Si aux $n-1$ premiers tirages on n'a obtenu que des boules noires (c'est possible puisqu'il y a$n-1$ boules noires) alors avant le $n$-ième tirage il ne reste qu'une boule blanche dans l'urne. On l'obtient nécessairement au $n$ième tirage. Ainsi

$$\boxed{N = n}$$

   Comme précédemment on a pour tout $k \in [\![1, n]\!]$

$$D_k = \left( \bigcap_{i=1}^{k-1} N_i \right) \cap B_k$$

   Notons que, comme il y a $n-1$ boules noires dans l'urne,

$$P\left( \bigcap_{i=1}^{k-1} N_i \right) \neq 0$$

   Ainsi d'après la formule des propbabilités composées on a :

$$P(D_k) = P(N_1) \times P_{B_1}(N_2) \times \cdots \times P_{N_1 \cap \cdots N_{k-2}}(N_{k-1}) \times P_{N_1 \cap \cdots N_{k-1}}(B_k)$$

3. Notons $U$ l'événement, les tirages s'effectuent dans l'urne $U$. D'après l'énoncé on a $P(U) = \dfrac{1}{2} \neq 0$ et donc $P(\overline{U}) \neq 0$, Les événements $U, \overline{U}$ forment un systée complet d'événements, ainsi d'après la formule des probabilité totales on a :

$$P(B_1) = P(U) \times P_U(B_1) + P(\overline{U}) \times P_{\overline{U}}(B_1)$$

   Or d'après l'énoncé on a $P_U(B_1) = \dfrac{2}{3}$ et $P_{\overline{U}}(B_1) = \dfrac{1}{3}$, ainsi

$$\boxed{P(B_1) = \frac{1}{2}}$$

4. On cherche à calculer $P(B_1 \cap B_2)$. On a, comme ci-dessus, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(B_1 \cap B_2) = P(U) \times P_U(B_1 \cap B_2) + P(\overline{U}) \times P_{\overline{U}}(B_1 \cap B_2)$$

Une fois l'urne choisie les tirages sont effectués avec remise, ainsi les événement $B_1$ et $B_2$ sont indépendants pour les probabiltés $P_U$ et $P_{\overline{U}}$ on a ainsi :

$$P(B_1 \cap B_2) = P(U) \times P_U(B_1) \times P_U(B_2) + P(\overline{U}) \times P_{\overline{U}}(B_1) \times P_{\overline{U}}(B_2)$$

On a ainsi :

$$P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

Et donc :

$$\boxed{P(B_1 \cap B_2) = \frac{5}{18}}$$

5. On veut calculer $P_{B_1 \cap B_2}(U)$. Les événements $(U, \overline{U})$ forment un système complet d'événements ainsi d'après la formule de Bayes ($P(B_1 \cap B_2) \neq 0$ on a :

$$P_{B_1 \cap B_2}(U) = \frac{P(U) \times P_U(B_1 \cap B_2)}{P(B_1 \cap B_2)}$$

Ainsi d'après les questions précédentes on a :

$$P_{B_1 \cap B_2}(U) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{5}{18}}$$

On a donc

$$\boxed{P_{B_1 \cap B_2}(U) = \frac{4}{5}}$$

6. En utilisant la formule des porbabilités totales pur le système complet d'événements : le premier tirage s'effectue dans l'urne $U$ et le premier tirage s'effectue dans l'urne $V$, on obtient :

$$P(B_1) = \frac{a+b}{2}$$

7. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $U_k$ l'événement

$$U_k : \text{" Le } k\text{ième tirage s'effectue dans l'urne } U\text{"}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Les événements $(U_{k+1}, \overline{U_{k+1}})$ forment un système complet d'événements. On a ainsi, d'après la formule des probabilités totales

$$P(B_{k+1}) = P(U_{k+1})P_{U_{k+1}}(B_{k+1}) + P(\overline{U_{k+1}})P_{\overline{U_{k+1}}}(B_{k+1})$$

Or sachant qu'on fait le tirage dans l'urne $U$, la probabilité d'obtenir une boule blanche est $a$, de même, sachant que l'on fait le tirage dans l'urne $V$ la probabilité d'obtenir une boule blanche est $b$.
Par ailleurs, notons que d'après l'énoncé :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad U_{k+1} = B_k$$

Ainsi

$$P(U_{k+1}) = p_k \quad \text{et} \quad P(\overline{U_{k+1}}) = 1 - p_k$$

On a donc :

$$p_{k+1} = p_k a + (1 - p_k)b$$

D'où

$$\boxed{p_{k+1} = p_k(a - b) + b}$$

8. On reconnaît une suite arithmético-géométrique.
Notons $r = \dfrac{b}{1 - a + b}$ le réel qui vérifie :

$$r = (a - b)r + b$$

Il est bien définie puis que $b - a < 1$.
Notons alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = p_n - r$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en soustrayant les deux lignes suivantes,

$$p_{k+1} = p_k(a - b) + b$$

$$r = (a - b)r + b$$

On obtient

$$u_{n+1} = (a - b)u_n.$$

Ce qui montre que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$u_n = (a - b)^{n-1}u_1$$

Mais

$$u_1 = p_1 - \frac{b}{1 - a + b}$$

Ainsi d'après la question précédente :

$$u_1 = \frac{a + b}{2} - \frac{b}{1 - a + b}$$

Après simplification on a

$$u_1 = (a - b)\frac{1 - a - b}{2(1 - a + b)}$$

D'où, après calcul on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{p_n = \frac{(a - b)^{n+1}}{2}}$$

Comme $-1 < a - b < 1$ alors $p_n$ tend vers 0 quand $n$ tend vers $+\infty$.

9. D'après l'énoncé, le premier choix de l'urne est équiprobable, on a ainsi :

$$P(U_1) = p_1 = \frac{1}{2}$$

10. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, d'après la formule des probabilités totales utilisée avec le système complet d'événements $U_k$ et $\overline{U_k}$, on a

$$P(U_{k+1}) = P(U_k)P_{U_k}(U_{k+1}) + P(\overline{U_k})P_{\overline{U_k}}(U_{k+1})$$

Or,d'après l'énoncé, si on a fait le $k$-ième tirage dans l'urne $U$ pour faire le $k+1$-ième tirage dans l'urne $U$, il faut avoir obtenu une boule blanche au $k$-ième tirage. La probabilité est alors $a$. De même si le $k$-ième tirage s'effectue dans l'urne $V$, pour faire le $k + 1$-ième tirage dans l'urne $U$ il faut avoir obtenu une boule noire au $k$-ième tirage et la probabilité est de $1 - b$. On a ainsi,

$$q_{k+1} = q_k a + (1 - q_k)(1 - b)$$

D'où, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{q_{k+1} = q_k(a + b - 1) + 1 - b}$$

11. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on utilise encore la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(U_k, \overline{U_k})$. On a ainsi :

$$P(B_k) = P(U_k)P_{U_k}(B_k) + P(\overline{U_k})P_{\overline{U_k}}(B_k)$$

Et, d'après l'énoncé, $P_{U_k}(B_k) = a$ et $P_{\overline{U_k}}(B_k) = b$. On a ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ :

$$\boxed{P(B_k) = q_k a + (1 - q_k)b = q_k(a - b) + b}$$

## Problème 2. Intégration (et algèbre ?)

**On note $E = \mathcal{C}^0(]-1; +\infty[)$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur l'intervalle $I = ]-1; +\infty[$, continues et à valeurs dans $\mathbb{R}$.**
**Étant donné un élément $f \in E$, on appelle $T(f)$ l'application de $I$ dans $\mathbb{R}$ définie par :**

$$\forall x \in I, \quad T(f)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{1 + t} \,\mathrm{d}t$$

**Partie A : Quelques exemples.**

1. **Déterminer l'application $T(f)$ lorsque $f$ est l'application constante égale à $a \in \mathbb{R}$.**
2. **Déterminer $T(f)$ pour l'application :**

$$f : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(1+t) \end{cases}$$

3. **Déterminer $T(f)$ pour l'application :**

$$f : \begin{cases} I & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{t}{(t+2)^2} \end{cases}$$

**et donner un développement limité à l'ordre 2 de $T(f)$ en $+\infty$.**

4. **Pour tout entier $n$ strictement positif, on définit l'application $f_n : t \mapsto t^n$.**
**Soit $x \in I$.**
**Trouver une relation entre $T(f_{n+1})(x)$ et $T(f_n)(x)$.**
**En déduire une expression de $T(f_n)(x)$ à l'aide d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.**
5. **Vérifier que $T$ est un endomorphisme de $E$ et déterminer son noyau et son image.**

**Partie B Étude d'un cas particulier.**

**Cette partie est consacrée à l'étude de $T(f)$lorsque $f$ est définie, pour tout $t \in I$, par $f(t) = e^{-t}$. Ainsi,**

$$\forall x \in I, T(f)(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t} \, \mathrm{d}t$$

**On ne cherchera pas à calculer cette inttégrale.**

6. **Montrer que $T(f)$ est croissante sur $I$.**
7. **(a) Donner le développement limité de $f$ à l'ordre $2$ en $0$.**
   **(b) En déduire le développement limité de $T(f)$ à l'ordre $3$ en $0$.**
   **(c) Donner l'équation de sa tangente en $0$ et étudier la position de la courbe par rapport à la tangente.**
8. **Montrer que $T(f)$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$, puis que $T(f)(x)$ admet une limite quant $x$ tend vers $+\infty$. On ne cherchera pas à calculer cette limite.**
9. **Déterminer la limite de $T(f)(x)$ lorsque $x$ tend vers $(-1)^+$. On pourra pour cela établir une minoration ou une majoration de $T(f)(x)$.**

**Partie C Comportement en $+\infty$.**

**Dans cette partie, on fixe un élément $f \in E$ (pas nécessairement le même qu'en partie $B$) et on suppose que $f$ admet en $+\infty$ une limite $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$. On souhaite étudier le comportement de la fonction $T(f)$ en $+\infty$.**

10. **On suppose dans cette question que $\lambda = 0$.**
    **(a) Démontrer que la fonction $f$ est bornée sur $[0; +\infty[$.**
    **On notera dans la suite de la question $M = \sup_{t \in [0;+\infty[} \mid f(t) \mid$.**
    **(b) Pour $x \geq 1$, on pose**

$$\alpha(x) = \sup \{\mid f(t) \mid, \quad t \in [\ln(x); x]\}$$

    **la borne supérieure de $\mid f \mid$ sur l'intervalle $[\ln(x); x]$.**
    **Montrer que $\alpha(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.**
    **(c) Montrer que pour tout $x \geq 1$, on a :**

$$\mid T(f)(x) \mid \leq M \int_0^{\ln x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + \alpha(x) \int_{\ln x}^{x} \frac{\mathrm{d}t}{1+t}$$

    **(d) En déduire que**

$$T(f)(x) \underset{x \to +\infty}{=} o(\ln x)$$

11. **On suppose dans cette question que $\lambda \in \mathbb{R}^*$.**
**Trouver un équivalent simple de $T(f)(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.**
**On pourra considérer $T(g)$, où $g$ est définie par $g(t) = f(t) - \lambda$ pour tout $t \in I$.**

**12. On suppose dans cette question que $f(t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Montrer que $T(f)(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.**

**Corrigé :**

**Partie A : Quelques exemples.**

1. Soit $x \in I$. On a alors :
$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{a}{1+t}\ \mathrm{d}t = [a\ln(1+t)]_0^x$$
D'où
$$\boxed{\forall x \in I,\ \ T(f)(x) = a\ln(1+x)}$$

2. On a, de même,
$$\boxed{\forall x \in I,\ \ T(f)(x) = (\ln(1+x))^2}$$

3. Soit $x \in I$, on a
$$T(f)(x) = \int_0^x \frac{t}{(t+1)(t+2)^2\ \mathrm{d}t}$$
Notons que, pour tout $t \in I$,
$$\frac{t}{(1+t)(2+t)^2} = \frac{-1}{1+t} + \frac{1}{2+t} + \frac{1}{(t+2)^2}$$
D'où
$$T(f)(x) = -\ln(1+x) + \ln(2+x) - \frac{1}{x+2} + 1 - \ln(2)$$
On pose $h = \frac{1}{x}$ on a alors :
$$\begin{aligned} T(f)(1/h) &= \ln\left(\tfrac{1}{h}+2\right) - \ln\left(1+\tfrac{1}{h}\right) - \frac{2}{\frac{1}{h}+2} + 1 - \ln(2) \\ &= \ln(1+2h) - \ln(1+h) - 2h\frac{1}{1+2h} + 1 - \ln(2) \end{aligned}$$
En utilisant les développements limités de $x \mapsto \ln(1+x)$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ on obtient
$$T(f)(1/h) \underset{h\to 0}{=} 1 - \ln(2) - h + \frac{5}{2}h^2 + o(h^2)$$
On a ainsi
$$\boxed{T(f)(x) \underset{x\to+\infty}{=} 1 - \ln(2) - \frac{1}{x} + \frac{5}{2} \times \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a
$$T(f_n)(x) + T(f_{n+1})(x) = \int_0^x \frac{t^n + t^{n+1}}{1+t}\ \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{t^n(1+t)}{1+t}\ \mathrm{d}t = \int_0^x t^n\ \mathrm{d}t = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
On a ainsi
$$\boxed{T(f_{n+1})(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - T(f_n)(x)}$$
Un calcul au brouillon permet de conjecturer que
$$T(f_n)(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k}\frac{x^k}{k} + (-1)^n T(f_0)(x)$$
Montrons cette égalité par récurrence.
Elle est immédiatement initialisé pour à $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que l'égalité soit vraie au rang $n$ et montrons la au rang $n+1$. D'après le début de la question on a :
$$T_{n+1}(f)(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - T(f_n)(x)$$

Ainsi par hypothèse de récurrence on a bien :

$$T_{n+1}(f)(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{x^k}{k} + (-1)^n T(f_0)(x) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{n+1-k}\frac{x^k}{k} + (-1)^n T(f_0)(x)$$

Le principe de récurrence permet ainsi de conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors

$$T(f_n)(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{x^k}{k} + (-1)^n T(f_0)(x)$$

Par ailleurs on a :

$$T(f_0)(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t}\ \mathrm{d}t = \ln(1+x)$$

D'où

$$\boxed{T(f_n)(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\frac{x^k}{k} + (-1)^n \ln(1+x)}$$

5. D'après le théorème fondamental de l'analyse, si $f \in E$ alors l'application $x \mapsto T(f)(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ donc en particulier c'est bien une application continue, ainsi $T$ est bien à valeurs dans $E$.
Pour tout $f$ et $g$ éléments de $E$ et pour tout $\lambda \in R$ on a, pour tout $x \in I$

$$T(\lambda f + g)(x) = \int_0^x \frac{\lambda f(t) + g(t)}{1+t}\ \mathrm{d}t = \int_0^x \lambda\frac{f(t)}{1+t} + \frac{g(t)}{1+t}\ \mathrm{d}t$$

Ainsi, par linéarité de l'intégrale :

$$T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$$

L'application $T$ est bien un endomorphisme de $E$.
Calculons le noyau de $T$. Soit $f \in E$. Supposons que $f \in \ker T$. Si $T(f) = 0$ alors $T(f)' = 0$ mais d'après le théorème fondamental de l'analyse $T(f)'$ est la fonction $t \mapsto \dfrac{f(t)}{1+t}$ d'où, pour tout $t \in I$

$$\frac{f(t)}{1+t} = 0$$

Ainsi $f = 0$.
La fonction nulle est bien un élément du noyau ainsi :

$$\boxed{\ker f = \{0\}}$$

Montrons, par double inclusion que l'image de $T$ est l'ensemble

$$F = \left\{f \in \mathcal{C}^1(I), f(0) = 0\right\}$$

- Si $f \in E$, le théorème fondamental de l'analyse assure que $T(f)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et qui s'annule en 0.
- Soit $g$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ telle que $f(0) = 0$. Considérons l'application $f$ définie, pour tout $t \in I$, par :

  $$f(t) = g'(t)(1+t)$$

  On a alors, pour tout $x \in I$,

  $$T(f)(x) = \int_0^x g'(t)\ \mathrm{d}t$$

  Qui est, d'après le théorème fondamenal de l'analyse, la primitive de $g'$ qui s'annule en 0, c'est $g$. On a donc bien

  $$\boxed{Im(T) = \left\{f \in \mathcal{C}^1(I), f(0) = 0\right\}}$$

6. L'application $T(f)$ est dérivable (d'après le théorèm fondamental de l'analyse, et pour tout $x \in I$,

$$T(f)'(x) = \frac{e^{-x}}{1+x} > 0$$

L'application $T(f)$ est donc strictement croissante.

7. (a) On a les deux développements limités à l'ordre 2 en 0 :

$$e^{-x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + o(x^2)$$

Ainsi, par produit :

$$\frac{e^{-x)}}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - 2x + \frac{5}{2}x^2 + o(x^2)$$

(b) En primitivant le développement limité précédent et comme $T(f)(0) = 0$, on a :

$$T(f)(x) \underset{x\to 0}{=} x - x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$$

(c) La fonction $T(f)$ admet un développment limité à l'ordre 3, elle est dérivable (mais ça on le savait déjà), sa dérivée est en 0 est égale à 1. L'équation de la tangente en 0 est $y = x$ et comme

$$T(f)(x) - x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{5}{6}x^3$$

La courbe de $T(f)$ est d'abord en dessous de la tangente, puis au dessus de la tangente.

8. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, pour tout $t \in [0, x]$, $1 + t \leq 1$ ainsi comme l'application inverse est décroissante et comme $exp$ est positive on a :

$$\frac{e^{-t}}{1+t} \leq e^{-t}$$

Ainsi, par croissance de l'intégrale comme $0 \leq x$ :

$$T(f)(x) \leq \int_0^x e^{-t}\ \mathrm{d}t$$

Mais

$$\int_0^x e^{-t}\ \mathrm{d}t = 1 - e^{-x} \leq 1$$

La fonction $T(f)$ est croissante et majorée sur $\mathbb{R}_+$, elle admet une limite finie en $+\infty$.

9. Soit $x \in ]-1, 0]$ La fonction $x \mapsto e^{-x}$ étant décroissante on a, pour tout $t \in [x, 0]$, $e^{-t} \geq 1$. Ainsi pour tout $t \in ]-1, 0]$, on a

$$\frac{e^{-t}}{1+t} \geq \frac{1}{1+t}$$

Et comme $x \leq 0$, on a par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t}\ \mathrm{d}t \leq \int_0^x \frac{1}{1+t}\ \mathrm{d}t$$

Or

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\ \mathrm{d}t = \ln(1+x)$$

Ainsi, pour tout $x \in ]-1, +\infty[$, on a

$$\int_0^x \frac{e^{-t}}{1+t}\ \mathrm{d}t \geq \ln(1+x)$$

Mais comme $\ln(1+x) \underset{x\to -1}{\longrightarrow} -\infty$, on a

$$\boxed{T(f)(x) \underset{x\to -1}{\longrightarrow} -\infty}$$

10. (a) La fonction converge vers 0 en $+\infty$, il existe donc un voisinage de l'infini sur lequel la fonction est à valeurs dans $[-1, 1]$. Ainsi il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \geq A$ alors $\mid f(t) \mid \leq 1$.
Par ailleurs, sur l'intervalle $[0; A]$, la fonction $f$ étant continue elle y est bornée. Ainsi il existe $N \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in [0, A]$.

$$\mid f(t) \mid \leq N$$

En prenant le $B$ maximum de 1 et $N$, on a bien que pour tout $t \in [0; +\infty[$,

$$\mid f(t) \mid \leq B$$

La fonction $f$ est bien bornée sur $[0, +\infty[$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$, comme $f$ converge vers 0 en $+\infty$, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \geq A$, $\mid f(t) \mid \leq \varepsilon$. Posons $B = e^A$.
Alors si $x \geq B$, pour tout $t \in [\ln(x); x]$, comme ln est croissant $t \geq \ln(e^A)$ ainsi $t \geq A$ et donc $|f(t)| \leq \varepsilon$. On a donc bien :

$$\alpha(x) \leq \varepsilon$$

Et comme $\alpha$ est positif on a alors

$$\mid \alpha(x) \mid \leq \varepsilon$$

Ce qui montre que $\alpha$ tend vers 0 en $+\infty$.

(c) Soit $x \geq 1$, d'après l'inégalité triangulaire on a

$$\left| \int_0^x \frac{f(t)}{1+t} \, \mathrm{d}t \right| \leq \int_0^x \left| \frac{f(t)}{1+t} \right| \, \mathrm{d}t$$

De plus, d'après la relation de Chasles,

$$\int_0^x \left| \frac{f(t)}{1+t} \right| \, \mathrm{d}t = \int_0^{\ln x} \left| \frac{f(t)}{1+t} \right| \, \mathrm{d}t + \int_{\ln x}^x \left| \frac{f(t)}{1+t} \right| \, \mathrm{d}t$$

Or d'après les questions précédentes, pour tout $t \in R_+$ $|f(t)| \leq M$ donc comme $x \leq 1$, $\ln(x) \geq 0$ ainsi par croissance de l'intégrale :

$$\int_0^{\ln(x)} \left| \frac{f(t)}{1+t} \right| \, \mathrm{d}t \leq \int_0^{\ln(x)} \left| \frac{M}{1+t} \right| \, \mathrm{d}t$$

Et comme pour tout $t \in [0; \ln(x)]$ $\frac{M}{1+t} \geq 0$, on a, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_0^{\ln(x)} \left| \frac{f(t)}{1+t} \right| \, \mathrm{d}t \leq M \int_0^{\ln(x)} \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t$$

De plus, d'après la question précédente, pour tout $t \in [\ln(x); x]$

$$\left| \frac{f(t)}{1+t} \right| \leq \frac{\alpha(x)}{1+t}$$

De plus on a $\ln(x) \leq x$, en effet, ln est concave et l'équation de sa tangente en 1 est $y = x - 1$ ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x - 1 \leq x$, ainsi d'après la croissance et linéarité de l'intégrale on a :

$$\int_{\ln x}^x \left| \frac{f(t)}{1+t} \right| \, \mathrm{d}t \leq \alpha(x) \int_{\ln x}^x \frac{1}{1+t} \, \mathrm{d}t$$

D'où l'inégalité cherchée.

(d) Soit $x > 1$, les deux intégrales de l'inégalité démontrée à la question peuvent être calculées explicitement, et comme $\ln x > 0$ on a :

$$\frac{|T(f)(x)|}{\ln x} \leq M \frac{\ln(1+\ln(x))}{\ln x} + \alpha(x) \frac{\ln(1+x) - \ln(1+\ln(x))}{\ln(x)}$$

Mais on a

$$\frac{\ln(1+\ln(x))}{\ln x} = \frac{\ln(\ln(x))}{\ln(x)} + \frac{\ln(1+1/\ln(x))}{\ln(x)}$$

Or par croissances comparées la première quantité tend vers 0 en $+\infty$. La deuxième tend aussi vers 0 par produit de limites. Ainsi par somme

$$\frac{\ln(1+\ln(x))}{\ln x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

De plus

$$\alpha(x) \frac{\ln(1+x) - \ln(1+\ln(x))}{\ln(x)} = \alpha(x) \left[ 1 + \frac{\ln(1+1/x)}{\ln x} + \frac{\ln(1+\ln(x))}{\ln x} \right]$$

On a déjà montré que le dernier terme tendait vers 0, de plus $\dfrac{\ln(1+1/x)}{\ln x}$ tend vers 0 par produit. Ainsi le deuxième terme du produit tend vers 1 mais comme $\alpha(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, alors par produit :

$$\alpha(x) \frac{\ln(1+x) - \ln(1+\ln(x))}{\ln(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Le théorème d'encadrement permet alors de conclure que

$$\frac{T(f)(x)}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

On a bien

$$\boxed{T(f)(x) \underset{x\to 0}{=} o(\ln(x))}$$

11. Comme proposé dans l'énoncé, considérons la fonction $g$ définie pour tout $t \in I$ par

$$g(t) = f(t) - \lambda$$

Par définition de $\lambda$ et par somme de limites on a

$$g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi d'après la question précédente on a :

$$T(g)(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(\ln(x))$$

Il existe donc une fonction $\varepsilon$ qui tend vers 0 en $+\infty$ et telle que

$$\forall x \in I, \quad T(g)(x) = \ln(x)\varepsilon(x)$$

Mais on a, par linéarité, pour tout $x \in I$ :

$$T(g)(x) = \int_0^x \frac{f(t)-\lambda}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{\lambda}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

D'où en calculant cette dernière intégrale :

$$T(g)(x) = T(f)(x) + \lambda\ln(1+x)$$

On a alors pour $x \geq 1$ et comme $\lambda \neq 0$ :

$$\frac{T(f)(x)}{\lambda \ln x} + \frac{\ln(1+x)}{\ln x} = \varepsilon(x)$$

Or

$$\frac{\ln(1+x)}{\lambda\ln(x)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

On a ainsi

$$\boxed{T(f)(x) \underset{x+\infty}{\sim} \lambda \ln x}$$

12. Comme $f(t) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, alors il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $t \geq A$,

$$f(t) \geq 1$$

On a ainsi pour tout $x \geq A$ d'après la relation de Chasles et par croissance de l'intégrale :

$$T(f)(x) = \int_0^A \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_A^x \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t \geq \int_0^A \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_A^x \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

En calculant cette dernière intégrale on obtient :

$$T(f)(x) \geq \int_0^A \frac{f(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t + \ln(1+x) - \ln(1+A)$$

Seul le terme $\ln(1+x)$ dépend de $x$ et il tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$ ainsi par comparaison on a :

$$T(f)(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

## Problème 3 : Opérateurs de translation et de différence sur les polynômes

**Quelques notations. Dans tout le texte, $n$ désigne un entier naturel supérieur ou égal à $1$ et $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on note $\deg(P)$ le degré de $P$ et $\mathbf{cd}(P)$ son coefficient dominant, c'est à dire le coefficient devant $X^{\deg(P)}$.**

**Pour $k \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0,k]\!]$, le coefficient binomial $\binom{k}{j}$ vaut $\dfrac{k!}{j!(k-j)!}$.**

**Pour un ensemble $E$ et $f : E \to E$, on définit par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ l'application $f^k : E \to E$ de la façon suivante :**

$$f^0 = \mathbf{Id}_E \quad \textbf{et} \quad f^{k+1} = f \circ f^k.$$

**Si $E$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $F$ un sous-espace vectoriel de $E$, et $f$ un endomorphisme de $E$. On dira que $F$ est stable par $f$ si $f(F) \subset F$ autrement dit si**

$$\forall x \in F \quad f(x) \in F$$

**Partie A. L'opérateur de translation.**

**Soit l'application**

$$\tau : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{array} \right. .$$

1. **Pour un polynôme $P$ non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, justifier que**

$$\deg(\tau(P)) = \deg(P) \quad \textbf{et} \quad \mathbf{cd}\,(\tau(P)) = \mathbf{cd}(P).$$

2. **Montrer que $\tau$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.**
3. **Montrer que le noyau de $\tau$ est réduit à $\{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$. Justifier que $\tau$ est un automorphisme.**
4. **Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}\ \tau^k(P) = P(X+k)$.**

**Partie B. L'opérateur de différence.**

**Dans la suite, on note $\delta$ l'endomorphisme $\delta = \tau - \mathbf{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$, c'est à dire**

$$\delta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) - P(X) \end{array} \right. .$$

5. **(a) Calculer $\delta(P)$ dans le cas où $P$ est un polynôme constant.**
   **(b) Pour un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}_n[X]$, exprimer $\deg(\delta(P))$ et $\mathbf{cd}(\delta(P))$ en fonction de $\deg(P)$ et $\mathbf{cd}(P)$.**
   **(c) En déduire que $\ker(\delta)$ est une droite, dont on précisera une base.**
   **(d) Démontrer que $\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.**
6. **(a) Démontrer :**

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \quad \delta^n(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}.$$

   **(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, et $P \in \mathbb{R}_n[X]$, en écrivant la formule du binôme de Newton pour deux endomorphismes qui commutent, exprimer $\delta^n(P)$ en fonction des $\tau^j(P)$ pour $j \in [\![0,n]\!]$.**
   **(c) En déduire que pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a l'identité**

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0.$$

7. **Dans cette question, on cherche les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}_n[X]$ qui sont stables par $\delta$.**
   **(a) Pour un polynôme non nul de degré $d \leq n$, montrer que la famille $\left(P, \delta(P), \delta^2(P), \ldots, \delta^d(P)\right)$ est libre. Quel est l'espace vectoriel engendré par cette famille ?**
   **(b) En déduire que si $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par $\delta$ et non réduit à $\{0\}$, il existe un entier $d \in [\![0,n]\!]$ tel que $F = \mathbb{R}_d[X]$.**

**Partie C. Polynômes de Hilbert.**

**On considère la famille de polynômes**

$$\left\{\begin{array}{ll} H_0 & = 1 \\ H_k & = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(X-j) \quad \textbf{pour } k \in [\![1,n]\!]. \end{array}\right.$$

**C.1. Décomposition sur la base.**

8. **Montrer que** $(H_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ **est une base de** $\mathbb{R}_n[X]$**.**
9. **Calculer** $\delta(H_0)$ **puis montrer que pour** $k \in [\![1,n]\!]$**,** $\delta(H_k) = H_{k-1}$**.**
10. **Montrer que pour** $k, l \in [\![0,n]\!]$**,**
$$\delta^k(H_l)(0) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \textbf{si } k = l \\ 0 & \textbf{si } k \neq l \end{array}\right.$$
11. **Montrer que pour tout** $P \in \mathbb{R}_n[X]$**,**
$$P = \sum_{k=0}^{n} \delta^k\,(P)(0)H_k.$$

**Corrigé :**
**Partie A.** L'opérateur de translation.

1. Soit $P$ un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$. Notons $d$ son degré (il est inférieur à $n$). On peut écrire $P$ sous la forme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, où $a_d$, coefficient dominant de $P$, est non nul. On calcule
$$\begin{aligned}\tau(P) = \sum_{k=0}^{d} a_k(X+1)^k &= a_d(X+1)^d + \sum_{k=0}^{d-1} a_k(X+1)^k \\ &= a_d X^d + \sum_{k=0}^{d-1}\binom{d}{k}X^k + \sum_{k=0}^{d-1} a_k(X+1)^k.\end{aligned}$$
Les deux sommes écrites ci-dessus sont des polynômes de degré inférieur à $d-1$. Ainsi, on voit que $\tau(P)$ est un polynôme de degré $d = \deg(P)$ et de coefficient dominant $a_d = \mathrm{cd}(P)$.
2. Tout d'abord, remarquons que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors le polynôme $P$ un degré inférieur à $n$. C'est aussi le cas de $\tau(P)$, d'après la question précédente. Montrons que $\tau$ est linéaire. Pour $P$ et $Q$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda, \mu$ dans $\mathbb{R}$,
$$\tau(\lambda P + \mu Q) = (\lambda P + \mu Q)\,(X+1) = \lambda P(X+1) + \mu Q(X+1) = \lambda\tau(P) + \mu\tau(Q).$$
3. Soit $P \in \ker(\tau)$. Alors $\tau(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Supposons $P \neq 0$. Alors $\deg(\tau(P)) = \deg(P)$, d'où $\tau(P) \neq 0$, ce qui n'est pas. Le polynôme $P$ est donc nul, ce qui montre que $\ker(\tau) = \{0_{\mathbb{R}_n[X]}\}$.
Ce qui précède implique que l'application $\tau$ est injective. Puisque la dimension de l'espace de départ vaut celle de l'espace d'arrivée, par caractérisation de la bijectivité en dimension finie, on obtient que $\tau$ est bijective.
4. Le polynôme $P$ étant fixé, pour $k$ entier naturel on pose
$$\mathrm{Pr}_k \text{ « } \tau^k(P) = P(X+k) \text{ ».}$$
• On a $\tau^0(P) = Id_{\mathbb{R}_n[X]}(P) = P = P(X+0)$ : $\mathrm{Pr}_0$ est vraie.
• Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathrm{Pr}_k$. Alors,
$$\tau^{k+1} = \tau\circ\tau^k(P) = \tau(\tau^k(P)) = \tau(P(X+k)) = P((X+1)+k) = P(X+(k+1)).$$
Ceci démontre $\mathrm{Pr}_{k+1}$.
• D'après le principe de récurrence, $\mathrm{Pr}_k$ est vraie pour tout $k$ entier naturel.

**Partie B.** L'opérateur de différence.

5. (a) Si $P$ est un polynôme constant égal à $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\delta(P) = a - a = 0_{\mathbb{R}_n[X]}.$$

(b) Soit un polynôme non constant de $\mathbb{R}_n[X]$. Notons $d$ son degré. On peut écrire $P$ sous la forme $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$, avec $d \in [\![1, n]\!]$ et $a_d \neq 0$. On calcule en mettant de côté les termes de degré $d$ et $d-1$ :

$$\begin{aligned}\delta(P) &= \sum_{k=0}^{d} a_k \left((X+1)^k - X^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k \sum_{j=0}^{d-1} \binom{k}{j} X^j = d a_d X^{d-1} + \underbrace{Q}_{\in \mathbb{R}_{d-2}[X]}.\end{aligned}$$

On en déduit les égalités

$$\deg(\delta(P)) = d - 1 = \deg(P) - 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{cd}\,(\delta(P)) = d a_d = \deg(P) \cdot \mathrm{cd}(P).$$

(c) On sait depuis la question 1(a) que le noyau de $\delta$ contient les polynômes constants. Or, d'après la question précédente, si $P$ est un polynôme non constant, alors $\deg(P) \geq 1$ et $\deg(\delta(P)) \geq 0$, ce qui implique que $\delta(P)$ n'est pas nul. Ainsi, le noyau de $\delta$ est réduit aux polynôme constants. C'est une droite vectorielle engendrée par le polynôme constant égal à 1.

(d) D'après le théorème du rang, appliquée à $\delta$,

$$\dim(\mathrm{Im}(\delta)) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - \dim(\ker(\delta)) = n + 1 - 1 = n.$$

Or, d'après la question (b), si $P$ est un polynôme de degré inférieur à $n$, alors $\delta(P)$ est de degré inférieur à $n-1$, ce qui se récrit $\mathrm{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On vient de démontrer que $\dim(\mathrm{Im}(\delta)) = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. Ceci permet de conclure que $\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Solution sans le théorème du rang : la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ étant une famille génératrice au départ,

$$\mathrm{Im}(\delta) = vect(\delta(1), \delta(X), \ldots, \delta(X^n)).$$

On a $\delta(1) = 0$ et d'après 1(b), pour $k \geq 1$, $\deg(\delta(X^k)) = k-1$. La famille $(\delta(X), \ldots, \delta(X^n))$ engendre donc $\mathrm{Im}(\delta)$ et elle est libre car de degrés échelonnés. Le s.e.v. $\mathrm{Im}(\delta)$ est donc de dimension $n$. Étant inclus dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, lui-même de dimension $n$, on a bien $\mathrm{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

6. (a) Soit $P$ de degré inférieur à $n-1$. D'après la question 1.(b), le degré chute de 1 chaque fois que l'on applique $\delta$ à un polynôme non constant. Ainsi, en notant $d = \deg(P)$,

$$\deg(\delta^d(P)) = \deg(P) - d = 0.$$

Le polynôme $\delta^d(P)$ est donc un polynôme constant, d'où $\delta^{d+1}(P) = 0$. On a donc,

$$\delta^n(P) = \delta^{n-1-d}(\underbrace{\delta^{d+1}(P)}_{=0_{\mathbb{R}_n[X]}}) = \delta^{n-1-d}\left(0_{\mathbb{R}_n[X]}\right) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}.$$

(b) L'identité $(-)Id_{\mathbb{R}_n[X]}$ commute avec $\tau$, comme avec n'importe quel endomorphisme. On peut donc écrire la formule du binôme, pour $\tau$ et $-Id$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\delta^n = (\tau - Id)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \tau^j \circ (-Id)^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j.$$

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On va évaluer en l'égalité précédente en $P$. D'après 2.(a), $\delta^n(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. De plus, pour $j \in [\![0, n]\!]$, la question A.4 nous apprend que $\tau^j(P) = P(X+j)$. En évaluant (*), égalité entre endomorphismes en $P$, on obtient donc

$$0_{\mathbb{R}_n[X]} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j).$$

Il reste à évaluer cette égalité entre polynôme en 0 pour obtenir :

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0.$$

7. (a) D'après la question 1.(b), les degrés des polynômes de la famille $\left(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P)\right)$ sont respectivement $d, d-1, \ldots, 1, 0$. Cette famille de polynômes non nuls étant de degrés échelonnés, elle est libre. Notons

$$V = vect\left(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P)\right).$$

Toute combinaison linéaire de polynômes de cette famille est de degré inférieur à $d$, de sorte que $V \subset \mathbb{R}_d[X]$. Or, $V$ est de dimension $d+1$, car il est engendré par une famille libre de cardinal $d+1$. On a donc

$$V = \mathbb{R}_d[X].$$

(b) Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, stable par $\delta$ et non réduit à $\{0\}$. Soit $d$ *le plus grand degré* d'un polynôme de $F$ et $P \in F$ de degré $d = \deg(P)$. Comme $F \neq \{0\}$, on a $d \geq 0$ et $d$ étant maximal, $\boxed{F \subset \mathbb{R}_d[X]}$.
Le polynôme $\delta(P)$ appartient à $F$ puisque $F$ est stable par $\delta$. Il en va de même de $\delta^2(P) = \delta(\delta(P))$ puisque $\delta(P) \in F$ et en itérant, on obtient que tous les polynômes de la famille $\left(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P)\right)$ appartiennent à $F$. On a donc

$$vect\left(P, \delta(P), \ldots, \delta^d(P)\right) \subset F.$$

D'après 1. ceci se récrit $\boxed{\mathbb{R}_d[X] \subset F}$, ce qui permet de conclure que $F = \mathbb{R}_d[X]$.
En guise de conclusion globale sur la question 3, on écrira que les sous-espaces stables par $\delta$ sont exactement le sous-espace nul et les espaces $\mathbb{R}_d[X]$ avec $d \in [\![0, n]\!]$.

**Partie C.** Polynômes de Hilbert.

8. Cette famille est constituée de polynômes non nuls de degrés échelonnés : c'est une famille libre. Étant de cardinal $n+1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$, espace de dimension $n+1$, c'est bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
9. Le polynôme $H_0$ est constant : $\delta(H_0) = 0$. Soit $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\delta(H_k) &= H_k(X+1) - H_k \\
&= \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X+1-j) - \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X-j) \\
&\underset{i=j-1}{=} \frac{1}{k!}\prod_{i=-1}^{k-2}(X-i) - \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X-j) \\
&= \frac{1}{k!}\left(\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\right)(X+1-(X-(k-1))) \\
&= \frac{k}{k(k-1)!}\left(\prod_{j=0}^{k-2}(X-j)\right) = H_{k-1}.
\end{aligned}$$

10. Soient $l \in [\![0, n]\!]$. D'après la question précédente et une récurrence immédiate, pour tout $i$ inférieur à $l$, $\delta^i(H_l) = H_{l-i}$. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
    - Si $k \leq l-1$), alors $l-k \geq 1$ et 0 est racine du polynôme $H_{l-k}$. On a donc $\delta^k(H_l)(0) = H_{l-k}(0) = 0$.
    - Si $k = l$, $\delta^k(H_l) = H_0 = 1$ et on a $\delta^k(H_l)(0) = 1$.
    - Si $k > l$, alors $\delta^k(H_l) = \delta^{k-l}(H_0) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. On a donc $\delta^k(H_l)(0) = 0$.
11. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. La famille $(H_0, \ldots, H_n)$ étant une base de $\mathbb{R}_n[X]$,

$$\exists(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad P = \sum_{l=0}^{n}\lambda_l H_l.$$

Fixons $k$ dans $[\![0, n]\!]$ et appliquons $\delta^k$. Par linéarité, $\delta^k(P) = \sum\limits_{l=0}^{n}\lambda_l\delta^k(P)$. Évaluons en 0 : le seul terme non nul, d'après la question précédente, est celui d'indice $l = k$, qui vaut 1 d'où

$$\delta^k(P)(0) = \lambda_k\delta^k(H_k)(0) = \lambda_k,$$

ce qui permet de conclure.