Lycée Condorcet Mai 2024
PCSI

Variables aléatoires réelles sur un univers fini

Table des matières

Dans tout ce chapitre, Ω désigne un ensemble fini, et (Ω, P) est un espace probabilisé fini.

1 Introduction

Quand on réalise une expérience aléatoire, il arrive que l'on s'intéresse plus à certaines propriétés du résultat qu'au résultat lui-même. En pratique, on étudiera une fonction du résultat. C'est cette fonction que l'on appellera **variable aléatoire**.

Exemple 1

1. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer deux dés équilibrés. On peut prendre comme univers des résultats observables $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$. On demande quelle est la somme des deux nombres obtenus. On va considérer l'application $S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall (x_1, x_2) \in \Omega,\ S\big((x_1, x_2)\big) = x_1 + x_2$. L'application S prend des valeurs qui sont déterminées par le résultat de l'expérience aléatoire ; l'application S est appelée variable aléatoire.
   On notera $S(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles pour S. Ici, $S(\Omega) = [\![2, 12]\!]$.
   On peut maintenant considérer des évènements définis grâce à la variable aléatoire S. Par exemple, l'évènement « la somme des dés est égale à 6 » est $\{\omega \in \Omega \mid S(\omega) = 6\}$. On notera plus simplement $[S = 6]$ cet évènement. Ainsi par définition
   $$\{S = 6\} = \big\{\omega \in \Omega \mid S(\omega) = 6\big\}.$$
   Donner la liste des éléments de $\{S = 6\}$.
   Quelle est la probabilité de cet évènement ?

2. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer trois fois une pièce de monnaie équilibrée, et à regarder si l'on a obtenu pile ou face. L'univers des résultats observables est $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}^3$. On demande maintenant combien de fois l'on a obtenu pile. On va considérer l'application $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, telle que pour tout $\omega = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $X(\omega)$ soit égal au nombre de fois où « pile » apparait dans le triplet (x_1, x_2, x_3). Préciser l'ensemble $X(\Omega)$.
   L'évènement « on obtient au moins deux fois pile » est l'évènement $\big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \geq 2\big\}$. Il sera noté plus simplement $\{X \geq 2\}$. Donner la liste des éléments qui constituent cet évènement. Quelle est la probabilité de cet évènement ?

3. Une urne contient 20 boules numérotées. On en tire 3 successivement, et sans remise.
   On peut prendre comme univers Ω des résultats possibles l'ensemble des 3-listes d'éléments distincts de $[\![1, 20]\!]$.
   On demande quel est le numéro le plus élevé (parmi les trois numéros tirés). On va considérer l'application $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : pour tout $\omega = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$, $Y(\omega) = \max(x_1, x_2, x_3)$. Préciser $Y(\Omega)$.
   On considère l'évènement « le numéro le plus élevé est supérieur ou égal à 17 ». Écrire cet évènement en utilisant Y. Quelle est la probabilité de cet évènement ?

Définition 1.

On appelle **variable aléatoire** sur Ω toute application de Ω dans un ensemble E (on rappelle que Ω est un ensemble fini).
Si $E \subset \mathbb{R}$, on dira que la variable aléatoire est **réelle**.

- **Notations**

1. Si X est une variable aléatoire sur Ω, on notera $X(\Omega)$ l'ensemble des valeurs possibles pour X. Précisément : $X(\Omega) = \big\{X(\omega) \mid \omega \in \Omega\big\}$. Comme on a supposé ici que Ω est un ensemble fini, alors $X(\Omega)$ est une partie finie de $\mathbb{R}$.
2. Si X est une variable aléatoire sur Ω, et si I est une partie de E, on désignera par $\{X \in I\}$ ou $(X \in I)$ l'évènement $\big\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in I\big\}$.

3. Si X est une variable aléatoire sur Ω et si $x \in E$, on note $\{X = x\}$ ou $(X = x)$ l'événement $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) = x\}$.

4. Si X est une variable aléatoire réelle sur Ω et $x \in \mathbb{R}$, on note $\{X \leq x\}$ ou $(X \leq x)$ l'événement $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq x\}$.
On définit de même les événements $(X < x)$, $(X \geq x)$, $(X > x)$ et $(X \neq x)$.

Proposition-Définition 2.

Soit X une variable aléatoire sur Ω.
La famille dévènements $\big([X = x]\big)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'évènements, appelé système complet d'évènements associé à la variable aléatoire X.

Démonstration : Pour tout $\omega \in \Omega$, on a bien sûr $X(\omega) \in X(\Omega)$, donc $\omega \in \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\}$. Ainsi $\Omega \subset \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\}$, l'autre inclusion est imédiate. D'où

$$\Omega = \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{X = x\}$$

Soit x_1 et x_2 deux éléments de $X(\Omega)$. Supposons qu'il existe $\omega \in \{X = x_1\}\{X = x_2\}$, alors $x_2 = X(\omega) = x_1$ d'où $\{X = x_1\} = \{X = x_2\}$. Les ensembles sont bien deux à deux incompatibles. ∎

Exemple 2

Pour chacun des trois exemples introductifs, donner le système complet d'évènements associé à la variable aléatoire étudiée.

2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle

2.1 Définition

Si l'espace de départ est un espace probabilisé. La variable aléatoire va permettre définir une nouvelle probabilité sur $X(\Omega)$.

- On commence par reprendre les trois exemples de l'introduction.

Exemple 3

1. Dans le premier exemple, on avait une variable aléatoire S qui donnait la somme des nombres obtenus en lançant deux dés. On a vu que $S(\Omega) = [\![2, 12]\!]$, et on peut donner, pour chaque $k \in [\![2, 12]\!]$, la valeur de $P(S = k)$. Compléter en exercice les valeurs du tableau suivant.

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S = k)$											

On peut en déduire, pour toute partie E de $[\![2, 12]\!]$, la valeur de $P(S \in E)$. Par exemple, calculer $P\big(S \in \{2, 3, 12\}\big)$.

Ainsi, à toute partie E de $[\![2, 12]\!]$, on sait associer le nombre $P(S \in E) \in [0, 1]$. On peut donc considérer l'application

$$P_S : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}\big([\![2, 12]\!]\big) & \longrightarrow & [0, 1] \\ E & \longmapsto & P(S \in E) \end{array}.$$

Il est facile de vérifier que cette application P_S est une probabilité sur l'espace fini $\big([\![2, 12]\!], \mathcal{P}([\![2, 12]\!])\big)$, au sens défini dans le chapitre sur les probabilités sur un univers fini. On dit que cette probabilité P_S est la probabilité induite par S sur $S(\Omega)$.

Remarquer qu'il serait beaucoup trop long, pour décrire l'application P_S, de donner la liste de tous les

$P_S(E)$, avec $E \in \mathcal{P}\big([\![2,12]\!]\big)$. En effet, combien y a-t-il d'éléments dans $\mathcal{P}\big([\![2,12]\!]\big)$? En revanche, comme on l'a remarqué plus haut, la donnée des $P_S(\{k\})$ (c'est à dire $P(S=k)$), pour $k \in [\![2,12]\!]$, suffit à retrouver toutes les valeurs que l'on souhaite.

2. Dans le deuxième exemple, on jouait trois fois à pile ou face avec une pièce équilibrée, et X était la variable aléatoire qui comptait le nombre de fois où l'on avait obtenu pile. On avait $X(\Omega) = [\![0,3]\!]$. On peut considérer l'application
$$P_X : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}\big([\![0,3]\!]\big) & \longrightarrow & [0,1] \\ E & \longmapsto & P(X \in E) \end{array}.$$
Comme dans le premier exemple, cette application P_X est une probabilité sur l'espace fini $\big([\![0,3]\!], \mathcal{P}([\![0,3]\!])\big)$. Pour la décrire, il suffit de connaître les valeurs $P(X=k)$, avec $k \in X(\Omega) = [\![0,3]\!]$. Compléter en exercice qle tableau suivant.

k	0	1	2	3
$P(X=k)$				

Combien vaut la somme des coefficients de la deuxième ligne du tableau ? Pourquoi ?

3. Dans le troisième exemple, on effectuait trois tirages sans remise dans une urne contenant 20 boules numérotées de 1 à 20, et Y était la variable aléatoire qui renvoyait le plus grand numéro tiré.
On a $Y(\Omega) = [\![3,20]\!]$, et on peut considérer l'application
$$P_Y : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}\big([\![3,20]\!]\big) & \longrightarrow & [0,1] \\ E & \longmapsto & P(Y \in E) \end{array},$$
qui est une probabilité sur l'espace fini $\big([\![3,20]\!], \mathcal{P}([\![3,20]\!])\big)$. Pour la décrire, il suffit de connaître les valeurs $P(Y=k)$, avec $k \in Y(\Omega) = [\![3,20]\!]$. Calculer pour tout $k \in [\![3,20]\!]$, $P(Y=k)$.

Proposition-Définition 3.

Soit X une variable aléatoire sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$. L'application
$$P_X : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}\big(X(\Omega)\big) & \longrightarrow & [0,1] \\ E & \longmapsto & P(X \in E) \end{array}$$
est une probabilité sur l'espace fini $\big(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega))\big)$. On l'appelle la **probabilité induite** par X sur $\big(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega))\big)$, ou aussi **loi de probabilité de la variable aléatoire** X.

Démonstration : • L'application P_X est bien définie sur $\mathcal{P}(X(\Omega))$ et à valeurs dans $[0,1]$.

• On a, par définition, $\{X \in X(\Omega)\} = \Omega$ donc $P_X(X(\Omega)) = 1$.

• Si A et B sont deux parties disjointes de $X(\Omega)$, alors :
$$\{X \in A\} \cap \{X \in B\} = \emptyset \quad \text{et} \quad \{X \in A\} \cup \{X \in B\} = \{X \in A \cup B\}$$
Les événements $\{X \in A\}$ et $\{X \in B\}$ sont donc incompatibles ainsi :
$$P_X(A \cup B) = P(X \in A \cup B) = P(X \in B) + P(X \in A) = P_X(A) + P_X(B)$$
■

• **En pratique,** donner la loi de la variable aléatoire X, c'est préciser $X(\Omega)$, et donner, pour chaque $x \in X(\Omega)$, la valeur de $P(X=x)$. La notation P_X sera peu employée.

Exemple 4

On lance deux fois un dé équilibré, et on note à chaque fois le numéro obtenu. On note M la variable aléatoire qui renvoie le plus grand de ces deux nombres. Donner la loi de M.

• **Vocabulaire**. Soient X et Y deux variables aléatoires sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$.
Intuitivement, dire que X et Y ont même loi, c'est dire que X et Y prennent les mêmes valeurs, et que les probabilités d'obtenir ces valeurs sont les mêmes. Bien souvent, en pratique, quand on demande de montrer que X et Y ont même loi, c'est en ce sens là qu'il faut l'entendre, et c'est ce que l'on montre.
Cependant, théoriquement, il est possible qu'une variable aléatoire prenne effectivement une valeur, mais avec une probabilité nulle. Ceci oblige à élargir la notion de « avoir même loi », de la façon suivante.
Dire que X et Y ont même loi, c'est dire qu'il existe une partie (finie) V de $\mathbb{R}$ telle que $P(X \in V) = 1$, $P(Y \in V) = 1$, et telle que pour tout $v \in V$, on ait $P(X = v) = P(Y = v)$.
Quand X et Y prennent vraiment les mêmes valeurs (i.e. $X(\Omega) = Y(\Omega)$), il suffit de prendre $V = X(\Omega) = Y(\Omega)$.
On peut aussi dire (cela revient au même) que X et Y ont même loi quand : pour tout $v \in \mathbb{R}$, $P(X = v) = P(Y = v)$.

2.2 Fonction d'une variable aléatoire

• Soit X une variable aléatoire sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$. Soit g une fonction de E dans un ensemble F. On peut considérer l'application composée $g \circ X : \Omega \longrightarrow F$.

En théorie des probabilités, l'usage est de noter cette application $g(X)$. Ainsi, pour tout $\omega \in \Omega$, on a $g(X)(\omega) = g\big(X(\omega)\big)$.

L'application $g(X)$ est une variable aléatoire sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$, dont on étudie la loi dans la proposition suivante.

Proposition 4.

Posons $Y = g(X)$. Alors Y est une variable aléatoire (finie) sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$, et

$$Y(\Omega) \;=\; g\big(X(\Omega)\big) \;=\; \big\{g(x) \;\big|\; x \in X(\Omega)\big\} \;=\; \big\{y \in \mathbb{R} \;\big|\; \exists x \in X(\Omega),\; y = g(x)\big\}.$$

De plus, pour tout $y \in Y(\Omega)$, on a

$$P(Y = y) \;=\; \sum_{\substack{x \in X(\Omega) \\ \text{tel que } g(x)=y}} P(X = x).$$

Démonstration : Soit $y \in Y(\Omega)$. On a :

$$\begin{aligned}\{Y = y\} = \{g(X) = y\} = \{\omega \in \Omega \mid g(X(\omega)) = y\} &= \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in g^{-1}(\{y\})\} \\ &= \{X \in g^{-1}(\{y\}) \\ &= \bigcup_{x \in g^{-1}(\{y\})} \{X = x\}\}\end{aligned}$$

Or les événements sont $\{X = x\}$ sont deux à deux incompatibles. On en déduit :

$$P(Y = y) = \sum_{x \in g^{-1}(\{y\})} P(X = x)$$

■

• **Remarque**. On rappelle que dans tout ce chapitre, Ω est un ensemble fini. Il en résulte que $X(\Omega)$ (et aussi $Y(\Omega)$) est un ensemble fini ; ainsi la somme que l'on a écrite dans la proposition est une somme qui a un nombre fini de termes. Il n'y a donc pas de problème de définition.

Exemple 5

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{-1, 0, 1\}$, et telle que $P(X = -1) = \dfrac{1}{3}$, $P(X = 0) = \dfrac{1}{2}$, et $P(X = 1) = \dfrac{1}{6}$.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\; g(x) = ax + b$. Posons $Y = g(X)$.
Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\; h(x) = x^2$. Posons $Z = h(X)$.
Quelle est la loi de Y ? et celle de Z ?

3 Lois usuelles

3.1 Variable aléatoire certaine

Définition 5.

Soit X une variable aléatoire sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$. On dit que X est une **variable aléatoire certaine** s'il existe une constante $a \in \mathbb{R}$ telle que $P(X = a) = 1$.
On peut aussi dire dans ce cas que X est presque sûrement constante (égale à a).

3.2 Loi de Bernoulli

Définition 6.

Soit X une variable aléatoire sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$. Soit $p \in [0, 1]$.
On dit que X suit la **loi de Bernoulli** de paramètre p si $P\big(X \in \{0, 1\}\big) = 1$, et si

$$P(X = 0) = 1 - p \quad \text{ et } \quad P(X = 1) = p.$$

Dans ce cas, on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.

Exemple 6

1. Soit $p \in]0, 1[$. On joue à pile ou face avec une pièce déséquilibrée, telle que la probabilité d'obtenir pile soit égale à p. On appelle X la variable aléatoire qui renvoie 1 si l'on a obtenu pile, et 0 sinon. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
2. Un match oppose deux équipes. On parie sur l'une des deux équipes. On note Y la variable aléatoire qui renvoie 1 si l'on a gagné le pari, et 0 sinon. Alors Y suit une loi de Bernoulli (dont il est difficile d'évaluer le paramètre en pratique !).
3. Une urne contient 50 boules. Chaque boule est soit rouge, soit verte. Soit $n \in [\![1, 49]\!]$. On suppose qu'il y a n boules rouges dans l'urne.
   On tire une boule au hasard. On note Z la variable aléatoire qui renvoie 1 si l'on a tiré une boule rouge, et 0 sinon. Alors $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(\frac{n}{50})$.
4. On considère la même urne, avec à nouveau 50 boules. On tire simultanément trois boules. On note U la variable aléatoire qui renvoie 1 si l'on a tiré au moins une boule rouge, et 0 sinon. Quelle est la loi de U ?

Proposition 7.

Soit A une partie de Ω. On considère l'application $\mathbf{1}_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbf{1}_A(\omega) = \left| \begin{array}{l} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \notin A \end{array} \right. .$$

On dit que $\mathbf{1}_A$ est la **variable indicatrice** de l'évènement A.
La variable aléatoire $\mathbf{1}_A$ suit la loi de Bernoulli de paramètre $P(A)$.

3.3 Loi binomiale

Définition 8.

Soit X une variable aléatoire sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [0,1]$.
On dit que X suit la loi binomiale de paramètres n et p si $P\big(X \in [\![0,n]\!]\big) = 1$ et si :

$$\forall k \in [\![0,n]\!],\ P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Dans ce cas, on note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

- **Remarques**

1. La définition est cohérente, car on a bien $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$, en utilisant la formule du binôme de Newton.
2. Si $n = 1$, on retrouve une loi de Bernoulli.

Exemple 7

1. On lance trois fois un dé équilibré. On note X la variable aléatoire qui renvoie le nombre de fois où l'on a obtenu 6. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(3, \frac{1}{6})$.
2. On dispose d'une pièce déséquilibrée, telle que la probabilité d'obtenir pile soit égale à $\frac{2}{3}$. On joue quatre fois à pile ou face. On note X la variable aléatoire qui renvoie le nombre de fois où l'on a obtenu pile. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(4, \frac{2}{3})$.
3. Une urne contient 20 boules, dont 15 sont vertes, et 5 sont rouges. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue successivement n tirages avec remise. On appelle X la variable aléatoire qui renvoie le nombre de boules rouges obtenues. Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{4})$.

- On rencontre les lois binomiales quand on est en situation de répétitions d'une épreuve de Bernoulli (succès/échec, avec une certaine probabilité fixée de succès), les résultats de ces répétitions étant indépendants. Par exemple, on lance plusieurs fois un même dé, avec le même critère de succès à chaque lancer (exemple 1), ou on lance plusieurs fois une même pièce de monnaie, et on compte le nombre de fois où l'on a obtenu pile (exemple 2), ou on effectue des tirages avec remise dans une urne contenant des boules, le critère de succès étant le même à chaque tirage (exemple 3). C'est pourquoi la loi binomiale est parfois appelée la **loi des tirages avec remise**.

3.4 Loi uniforme

Définition 9.

Soit X une variable aléatoire sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que X suit la **loi uniforme** sur $[\![1, n]\!]$ si $P\big(X \in [\![1, n]\!]\big) = 1$ et si
$$\forall k \in [\![1, n]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{n}.$$
Dans ce cas, on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$.
Remarquer que cette définition est cohérente, car $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$.
2. Soit $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $a \leq b$. On dit que X suit la **loi uniforme** sur $[\![a, b]\!]$ si $P\big(X \in [\![a, b]\!]\big) = 1$ et si
$$\forall k \in [\![a, b]\!],\ P(X = k) = \frac{1}{b - a + 1}.$$
Dans ce cas, on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![a, b]\!])$.
Remarquer que cette définition est cohérente, car $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} \frac{1}{b - a + 1} = 1$.

4 Espérance et variance

4.1 Espérance

• L'espérance est intuitivement la valeur moyenne que prend une variable aléatoire réelle : on va donc dans la définition suivante calculer une moyenne des valeurs possibles de la variable aléatoire. La question est de savoir par quels coefficients pondérer ces valeurs. Étant donné le caractère aléatoire de la variable, on veut qu'un valeur qui a de grandes chances d'être atteinte pèse plus qu'une valeur qui a peu de chances d'être atteinte.

Définition 10.

Soit X une variable aléatoire réelle sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$. On appelle **espérance** de X le nombre réel noté $\mathbf{E}(X)$, défini par
$$\mathbf{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

• **Remarque**. L'espérance de X est la moyenne des valeurs de X, pondérée par les probabilités d'obtenir ces valeurs.

Exemple 8

1. On lance un dé équilibré. Si l'on obtient 1 (resp. 2, 3), on perd cinq euros (resp. quatre euros, un euro). Si l'on obtient 4 (resp. 5, 6), on gagne un euro (resp. un euro, dix euros). Quelle est l'espérance de gain ? L'espérance de ce gain est 2.
2. Une urne contient cinq boules. Trois de ces boules sont vertes, les deux autres sont rouges. On tire deux boules simultanément.
On décide qu'on perd un euro par boule verte tirée, et qu'on gagne g euros par boule rouge tirée, avec $g \in \mathbb{R}$. Quelle doit être la valeur de g pour que l'espérance de gain soit nulle ? ($g = \frac{3}{2}$)
3. Soit A une partie de Ω. On note $\mathbf{1}_A : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par :
$$\forall \omega \in \Omega,\ \mathbf{1}_A(\omega) = \left| \begin{array}{l} 1 \text{ si } \omega \in A \\ 0 \text{ si } \omega \notin A \end{array} \right. .$$

Alors $\mathbf{1}_A$ est une variable aléatoire sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega)\big)$. Calculer l'espérance de $\mathbf{1}_A$.

4. Soient A_1, A_2 deux parties de Ω. On pose $X = \mathbf{1}_{A_1} + \mathbf{1}_{A_2}$. Quelle est l'espérance de X ?
5. On joue deux fois à pile ou face avec une pièce de monnaie déséquilibrée : sur chaque lancer, la probabilité d'obtenir pile est égale à $\dfrac{2}{3}$. Les résultats des deux lancers sont indépendants.
   On appelle X la variable aléatoire qui renvoie le nombre de fois où l'on a obtenu pile. Quelle est l'espérance de X ? ($\mathbf{E}(X) = \frac{4}{3}$).

• **Remarque**. Si X_1 et X_2 sont deux variables aléatoires qui ont même loi, alors $\mathbf{E}(X_1) = \mathbf{E}(X_2)$. La réciproque est fausse.

Proposition 11.

Soit X une variable aléatoire sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, son espérance est donné par :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega)$$

Démonstration : Soit $x \in X(\omega)$. On sait que Ω est l'union disjointe des ensembles $\{X = x\}$ avec $x \in X(\Omega)$. De plus, on peut écrire : $\{X = x\} = \bigcup\limits_{\omega \in \{X=x\}} \{\omega\}$. Les ensembles de cette union sont également deux à deux disjoints. Ainsi

$$P(\{X = x\}) = P\left(\bigcup_{\omega \in \{X=x\}} \{\omega\}\right) = \sum_{\omega \in \{X=x\}} P(\{\omega\}).$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(X) &= \sum_{x \in X(\Omega)} x P(\{X = x\}) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} x \sum_{\omega \in \{X=x\}} P(\{\omega\}) \\
&= \sum_{x \in X(\{\Omega\})} \sum_{\omega \in \{X=x\}} P(\{\omega\}) X(\omega) \\
&= \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\}) X(\omega)
\end{aligned}$$

■

Proposition 12 (théorème de transfert)**.**

Soit X une variable aléatoire sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$. Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie sur $X(\Omega)$. On peut ainsi considérer la variable aléatoire $g(X)$. Alors :

$$\mathbf{E}\big(g(X)\big) = \sum_{x \in X(\Omega)} g(x) P(X = x).$$

Démonstration : On pourrait chercher à utiliser la propostion qui donne la loi de $f(X)$ mais l'utilisation de la propostion 12 donne une démonstration plus claire. Rappelons que $\{X = x\}_{x \in X(\Omega)}$ es un système complet d'événements. D'après la proposition 12

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(f(X)) &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) f(X(\omega)) \\
&= \sum_{x \in X(\omega)} \left(\sum_{\omega \in \{X=x\}} P(\{\omega\}) f(X(\omega)) \right) \\
&= \sum_{x \in X(\omega)} f(x) \sum_{\omega \in \{X=x\}} P(\{\omega\}) \\
&= \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x)
\end{aligned}$$

■

Exemple 9

1. Supposons que X soit une variable aléatoire sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$ telle que $X(\Omega) = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ et tel que P soit l'équiprobabilité. On pose $Y = X(X-1)(X+1)$. Quelle est la loi de Y ? Calculer l'espérance de Y en utilisant directement la définition de l'espérance, puis en utilisant le théorème de transfert, puis comparer les calculs.

x	0	$\frac{3}{8}$
$P(Y = x)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

D'où $\mathbf{E}(Y) = \frac{3}{20}$.
Par le théorème de transfert, si on note g l'application qui à x associe $x(x-1)(x+1)$:

$$\mathbf{E}(Y) = \frac{1}{5}(g(-1) + g(-\frac{1}{2}) + g(0) + g(\frac{1}{2}) + g(1)) = \frac{1}{5}(\frac{3}{8} + \frac{3}{8}) = \frac{3}{20}$$

2. Avec la même variable aléatoire X, on pose maintenant $Z = 2X + 10$. Calculer l'espérance de Z.
En notant h l'application qui à x associe $2x + 10$, on a d'après le théorème de transfert :

$$\mathbf{E}(Z) = \frac{1}{5}(h(-1) + h(-\frac{1}{2}) + h(0) + h(\frac{1}{2}) + h(1)) = 10$$

- Ce dernier exemple se généralise de la façon suivante.

Proposition 13.

Soit X une variable aléatoire sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b.$$

Démonstration : On applique le théorème de transfert. ■

Proposition 14.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Alors

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X+Y) &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})(X+Y)(\omega) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})X(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} P(\{\omega\})Y(\omega) \\ &= \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) \end{aligned}$$

■

Proposition 15.

Soit X une variable aléatoire sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$. On suppose que X est à valeurs positives ou nulles (i.e. $X(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$). Alors

$$\mathbf{E}(X) \geq 0.$$

Démonstration : La somme de termes positifs est positive. ■

Corollaire 16.

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$.
On suppose que $X_1 \leq X_2$, c'est à dire : $\forall \omega \in \Omega,\ X_1(\omega) \leq X_2(\omega)$. Alors

$$\mathbf{E}(X_1) \leq \mathbf{E}(X_2).$$

Proposition 17.

Soit U, X et Y des variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. **Loi uniforme**. Si U suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$,
$$\mathbf{E}(U) = \frac{n+1}{2}.$$
2. **Loi de Bernoulli.** Si X suit une loi $\mathcal{B}(p)$,
$$\mathbf{E}(X) = p.$$
3. **Loi binomiale.** Si Y suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$,
$$\mathbf{E}(Y) = np$$

Démonstration : 1. Si U suit la loi uniforme $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ alors on a :

$$\mathbf{E}(\mathcal{U}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2}$$

2. Si X suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, on a

$$\mathbf{E}(X) = P(X = 0) \times 0 + P(X = 1) \times 1 = p$$

3. Si Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
Rappelons tout d'abord que $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et donc

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k} = np$$

■

Proposition 18 (Inégalité de Markov)**.**

Soit $(\Omega, \mathcal{P}P(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire réelle **positive** et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Alors,

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{a}$$

Démonstration : On a

$$\begin{aligned}\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x)x &\geq \sum_{x \in X(\Omega), x \geq a} P(X = x)x \\ &\geq \sum_{x \geq a} P(X = x)a\end{aligned}$$

Et donc on a bien comme a est positif

$$P(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}(X)}{a}$$

■

4.2 Variance

• Le but du calcul de la variance est de mesurer la « dispersion » d'une variable aléatoire autour de sa valeur moyenne (son espérance). Plus la variable aléatoire prend des valeurs éloignées de son espérance, plus la variance est élevée. Inversement, une variable aléatoire qui ne prend que des valeurs très proches de son espérance aura une variance faible.

Définition 19.

Soit X une variable aléatoire sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$. On appelle **variance** de X le nombre réel positif ou nul noté $\mathbf{V}(X)$, défini par

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\Big(\big(X - \mathbf{E}(X)\big)^2\Big).$$

On appelle **écart-type** de X le nombre réel positif ou nul noté $\sigma(X)$, défini par

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbf{V}(X)}.$$

• **Remarque**. La variance est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

Proposition 20 (Formule de Koenig - Huygens)**.**

Soit X une variable aléatoire sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$. On a

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2.$$

Démonstration : Par linéarité de l'espérance on a :

$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\Big((X - \mathbf{E}(X))^2\Big) = \mathbf{E}\Big(X^2 - 2\mathbf{E}(X)X + \mathbf{E}(X)^2\Big) = \mathbf{E}(X^2) - 2\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(X)^2$$

On a donc bien l'égalité cherchée. ■

Exemple 10

1. Soit $p \in [0, 1]$. On joue à pile ou face avec une pièce déséquilibrée, telle que la probabilité d'obtenir pile soit égale à p. On appelle X la variable aléatoire qui renvoie 1 si l'on a obtenu pile, et 0 sinon. Calculer la variance de X.
   Que se passe-t-il si $p = 0$ ou si $p = 1$?
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire telle que $Y(\Omega) = \{-a, -1, 1, a\}$, et telle que : $\forall y \in \{-a, -1, 1, a\},\ P(Y = y) = \dfrac{1}{4}$. Calculer l'espérance et la variance de Y en fonction de a.

$$\mathbf{E}(Y) = 0, \mathbf{V}(X) = \frac{a^2 + 1}{2}$$

Proposition 21.

Soit X une variable aléatoire sur $\big(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P\big)$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$\mathbf{V}(aX + b) = a^2\mathbf{V}(X).$$

Démonstration : On a :

$$\mathbf{V}(aX + b) = \mathbf{E}\Big((aX + b - a\mathbf{E}(X) - b)^2\Big) = \mathbf{E}\Big(a^2(X - \mathbf{E}(X))^2\Big) = a^2\mathbf{V}(X)$$

■

Proposition 22.

Soit U, X et Y des variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. **Loi uniforme**. Si U suit la loi $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$,
$$\mathbf{V}(U) = \frac{n^2-1}{12}.$$
2. **Loi de Bernoulli.** Si X suit une loi $\mathcal{B}(p)$,
$$\mathbf{V}(X) = p(1-p).$$
3. **Loi binomiale.** Si Y suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$,
$$\mathbf{V}(Y) = np(1-p)$$

Démonstration : 1. Si U suit la loi $\mathcal{U}([\![1, n]\!])$. On sait déjà que $\mathbf{E}(U) = \dfrac{n+1}{2}$. Ainsi,
$$\mathbf{V}(U) = \mathbf{E}(U^2) - \mathbf{E}(U)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n+1}{12}(4n+2-3n-3) = \frac{n^2-1}{12}$$

2. Si X suit une loi $\mathcal{B}(p)$, on sait déjà que $\mathbf{E}(X) = p$ et $\mathbf{E}(X^2) = 1^2 P(X=1) + 0^2 P(X=0) = p$ par le théorème de transfert. Ainsi
$$\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X) = p - p^2 = p(1-p)$$
3. Si Y suit la loi $\mathcal{B}(n,p)$, on sait déjà que $\mathbf{E}(Y) = np$. Notons que pour $k \in [\![2, n]\!]$
$$k(k-1)\binom{n}{k} = n(k-1)\binom{n-1}{k-1} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$$
donc par le théorème de transfert :
$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{E}(Y(Y-1)) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)P(Y=k) \\
& = & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
& = & \displaystyle\sum_{k=2}^{n} n(n-1)\binom{n-2}{k-2} p^k (1-p)^{n-k} \\
& = & \displaystyle n(n-1)p^2 \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} p^k (1-p)^{n-2-k} \\
& = & n(n-1)(1-p+p)^{n-2} \\
& = & n(n-1)p^2
\end{array}$$
On a donc :
$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{V}(Y) & = & \mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)^2 \\
& = & \mathbf{E}(Y(Y-1)+Y) - \mathbf{E}(Y)^2 \\
& = & \mathbf{E}(Y(Y-1)) + \mathbf{E}(Y) - \mathbf{E}(Y)^2 \\
& = & p^2 n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 \\
& = & np - np^2
\end{array}$$
On a donc bien $\mathbf{V}(Y) = np(1-p)$. ■

Proposition 23.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}P(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soit X une variable aléatoire réelle sur Ω et $a \in \mathbb{R}_+^*$. ALors,
$$P(\mid X - \mathbf{E}(X) \mid \geq a) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{a^2}$$

Démonstration : On a $P(\mid X - \mathbf{E}(X) \mid \geq a) = P((X - \mathbf{E}(X))^2 \geq a^2)$. On applique alors l'inégalité de Markov à la variable aléatoire réelle positive $(X - \mathbf{E}(X))^2$ ■

Exemple 11

Soit X une variable aléatoiresur $(\Omega, \mathcal{P}P(\Omega), P)$ de loi binomiale $\mathcal{B}(1000, \frac{1}{2})$. Majorer la probabilité de l'événement $(X \geq 600)$ d'abord avec l'inégalité de Markov, ensuite avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

5 Couple de variables aléatoires.

5.1 Loi conjointe.

Considérons $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$, deux variables aléatoires sur un même univers fini, $(\Omega, \mathcal{P}P(\Omega), P)$. Le couple de variables aléatoires (X, Y) peut être vu comme une variable aléatoire.

$$(X,Y) : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & E \times Y \\ \omega & \mapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{array} \right.$$

Définition 24.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}P(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soient $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$, deux variables aléatoires. On apelle **Loi conjointe** de X et Y la loi du couple (X, Y), déterminée par la famille de probabilités

$$\Big(P((X,Y) = (x,y))\Big)_{x \in X(\Omega), y \in Y(\Omega)}.$$

Les lois de X et Y sont dans ce contexte appelées premières et seconde **lois marginales**.

- On notera parfois :

$$P((X,Y) = (x,y)) = P(X = x, Y = y)$$

Exemple 12

1. Considérons l'expérience alétoire consistant à jeter deux dés, X la variable aléatoire donnant le plus petit résultat et Y le plus grand, $Z = (X, Y)$. La loi conjointe de Z est représentée par :

	$Y=1$	$Y=2$	$Y=3$	$Y=4$	$Y=5$	$Y=6$
$X=1$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
$X=2$	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
$X=3$	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
$X=4$	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$
$X=5$	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{18}$
$X=6$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$

2. Une urne contient 3 boules indiscernables numérotées de 1 à 3. On tire successivement deux boules avec remise, et on note X_1 et X_2 les numéros obtenus. On pose $X = X_1$ et $Y = \min(X_1, X_2)$. On trouve $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![1, 3]\!]$. La loi conjointe des variables X et Y peut être résumée dans le tableau suivant :

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{1}{3}$	0	0
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

Proposition 25.

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{P}P(\Omega), P)$. La première loi marginale, est donnée pour tout $x \in X(\Omega)$ par

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y)$$

Démonstration : La famille d'événements $((Y=y)_{y\in Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements de Ω. La formule des probabilités totales donne donc, pour tout $x \in X(\Omega)$:

$$P(X=x) = \sum_{y\in Y(\Omega)} P((X=x)\cap(Y=y)) = P(X=x, Y=Y)$$

■

Exemple 13

1. Soit $(X,Y) : \Omega \to \{0,1\}^2$ un couple de variables aléatoires sur Ω, dont la loi conjointe est donnée à travers les nombres $P(X=x, Y=y)$ du tableau :

$x\backslash y$	0	1
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

Les lois marginales de X et Y sont données par

x	0	1
$P(X=x)$		

y	0	1
$P(Y=y)$		

2. Déterminons les lois marginales du couple dont on a déterminé la loi conjointe dans l'exemple $12-1$ précédent. On obtient que pour tout $i \in [\![1,6]\!]$,

$$P(X=i) = \sum_{j=1}^{6} P(X=i, Y=j) = \frac{1}{36} + \sum_{j=i+1}^{6} \frac{1}{18} = \frac{1+2(6-i)}{36} = \frac{13-2i}{36}$$

De même pour tout $j \in [\![1,6]\!]$, on a :

$$P(Y=j) = \sum_{i=1}^{6} P(X=i, Y=j) = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = \frac{2j-1}{36}$$

3. Reprenons l'exemple $12-2$ et déterminons les lois marginales de X et Y. On trouve :

$X\backslash Y$	1	2	3	$P(X=x_i)$
1	$\frac{1}{3}$	0	0	
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	
$P(Y=y_i)$				

5.2 Couple de variables aléatoires indépendantes.

On conditionnera parfois par rapport aux événements élémentaires $(X=x)$, d'où la définition suivante.

Définition 26.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}P(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires définies sur Ω. Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X=x)>0$. On appelle **loi conditionnelle** de Y sachant $(X=x)$ la probabilité définie pour tout $y \in Y(\Omega)$ par les nombres

$$P_{(X=x)}(Y=y) = P(Y=y \mid X=x) = \frac{P((X,Y)=(x,y))}{P(X=x)}.$$

Définition 27.

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}P(\Omega), P)$. On dit que les variables X et Y sont **indépendantes** si pour tous $x \in X(\Omega)$, et tous $y \in Y(\Omega)$, les événements $(X=x)$ et $(Y=y)$ sont indépendants c'est à dire

$$\forall x \in X(\Omega),\ \forall y \in Y(\Omega) \qquad P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$$

Exemple 14

Soient $p_1 \in]0,1[$ et $p_2 \in]0,1[$. Soit $(X,Y) : \Omega \to \{0,1\}^2$ un couple de variables sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}P(\Omega), P)$, dont la loi conjointe est donnée par le tableau :

$x \backslash y$	0	1
0	$(1-p_1)(1-p_2)$	$(1-p_1)p_2$
1	$p_1(1-p_2)$	$p_1 p_2$

Les lois marginales de X et Y dont données par

x	0	1
$P(X=x)$	$1-p_1$	p_1

y	0	1
$P(Y=y)$	$1-p_2$	p_2

Par définition même de cette loi, pour tous $x,y \in \{0,1\}^2$,

$$P(X=x, Y=y) = P(X=x)P(Y=y)$$

Proposition 28.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}P(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, et X et Y deux variables aléatoires sur Ω. Les variables X et Y sont indépendantes si et seulement si

$$\forall A \subset X(\Omega) \quad \forall B \subset Y(\Omega) \qquad P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Démonstration : Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes alors on a :

$$\begin{aligned} P((X,Y) \in A \times B) &= \sum_{(x,y) \in A \times B} P(X=x, Y=y) \\ &= \sum_{x \in A} \sum_{y \in B} P(X=x)P(Y=y) \\ &= \Big(\sum_{x \in A} P(X=x) \Big) \Big(\sum_{y \in B} P(Y=y) \Big) \\ &= P(X \in A)P(X \in B) \end{aligned}$$

■

Proposition 29.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, $f : X(\Omega) \to E$ et $g : Y(\Omega) \to F$. Alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Démonstration : Soit $x \in E$ et $y \in F$.

$$\begin{aligned} P(f(X)=x, g(Y)=y) &= P((X \in f^{-1}(\{x\})) \cap (Y \in g^{-1}(\{y\})) \\ &= P(X \in f^{-1}(\{x\}))P(Y \in g^{-1}(\{y\})) \\ &= P(f(X)=x)P(g(Y)=y) \end{aligned}$$

Ainsi $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendants. ■

Proposition 30.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}P(\Omega), P)$. Si X et Y sont indépendantes alors :

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$$

Démonstration : Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}P(\Omega), P)$ indépendantes alors :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) & = & \left(\displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} P(X=x)x\right)\left(\displaystyle\sum_{y\in Y(\Omega)} P(Y=y)y\right) \\ & = & \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)}\sum_{y\in Y(\Omega)} P(X=x)P(Y=y)xy \\ & = & \displaystyle\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} P(X=x, Y=y)xy \\ & = & \mathbf{E}(XY) \end{array}$$

■

- **Attention !**

La réciproque n'est pas vraie ! Ce n'est pas parce que l'espérance du produit vaut le produit de l'espérance que l'on peut conclure à l'indépendance des variables aléatoires. Ceci est illustré par l'exmeple ci-dessous.

Exemple 15

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires de Bernoulli, de paramètre $1/2$. On pose :

$$U = X_1 + X_2 \quad \text{et} \quad V = X_1 - X_2$$

1. Démontrer que $\mathbf{E}(UV) = \mathbf{E}(U)\mathbf{E}(V)$.
2. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

5.3 Covariance et variables aléatoires décorélées

Définition 31.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé. On appelle **covariance** de X et Y et on la note $COV(X,Y)$ le réel :

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}\big((X - \mathbf{E}(X))(Y - \mathbf{E}(Y))\big)$$

Lorsque $\mathbf{Cov}(X,Y) = 0$, on dit que les variables X et Y sont **décorrélées**.

- **Remarque**. En particulier $\mathbf{Cov}(X,X) = \mathbf{V}(X)$ et $\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{Cov}(Y,X)$.

Proposition 32.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Alors

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$$

Démonstration : En utilisant la définition et la linéarité de l'espérance on obtient :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Cov}(X,Y) & = & \mathbf{E}((X-\mathbf{E}(X))(Y-\mathbf{E}(Y))) \\ & = & \mathbf{E}(XY - X\mathbf{E}(Y) - \mathbf{E}(X)Y + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)) \\ & = & \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) + \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) \end{array}$$

On a donc bien :

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$$

■

- **Remarque.** Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, on a déjà montré que $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$, donc $\mathbf{Cov}(X,Y) = 0$. Deux variables aléatoires indépendantes sont donc décorrélées.

La réciproque est fausse ! Dans l'exemple précédente nous avons vu que deux variables aléatoires non indépendantes peuvent vérifiées $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y)$.

Proposition 33.

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles. Alors :

$$\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X,Y)$$

En particulier, si X et Y sont décorélées, $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$.

Démonstration : La définition de la variance et la linéarité de l'espérance donnent :

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{V}(X+Y) & = & \mathbf{E}\big((X+Y-\mathbf{E}(X+Y))^2\big) \\ & = & \mathbf{E}\big((X+Y-\mathbf{E}(X)-\mathbf{E}(Y))^2\big) \\ & = & \mathbf{E}\big((X-\mathbf{E}(X))^2+(Y-\mathbf{E}(Y))^2+2(X-\mathbf{E}(X))(Y-\mathbf{E}(Y))\big) \end{array}$$

Ainsi les définitions de la variance et de la covariance et la linéarité de l'espérance donnent :

$$\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) + 2\mathbf{Cov}(X,Y)$$

■

- **Remarques.** Dans le cas de variables aléatoires indépendantes, on a donc $\mathbf{V}(X+Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$.

6 Famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes

6.1 Indépendance mutuelle d'une famille finie de variables aléatoires

Définition 34.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires définies sur un même univers Ω. On dit qu'elles sont **mutuellement indépendantes** si pour tout $(x_1, \cdots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \cdots \times X_n(\Omega)$ les événements $((X_i = x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ sont mutuellement indépendants.

Exemple 16

1. **Construction de n variables de Bernoulli ($p = 1/2$) mutuellement indépendantes.**
   Soit $\Omega = \{0,1\}^n$ munit de l'equiprobabilité. Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$ on note :

   $$X_i : \left\{ \begin{array}{ccc} \Omega & \to & \{0,1\} \\ (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & x_i \end{array} \right.$$

   Pour i fixé, on vérifie que $P(X_i = 1) = P(X_i = 0) = \frac{1}{2}$. Les variables de la famille $(X_1, \cdots X_n)$ ont donc chacune une loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$. On va vérifier qu'elles sont mutuellement indépendantes. Soit une famille d'indices $(i_1, \cdots, i_p)$ avec $p \in [\![1,]\!]$, et un n-uplet $(x_1, \cdots, x_p) \in \{0,1\}^p$. L'événements

   $$\bigcap_{k=1}^{p} (X_{i_k} = x_k)$$

   est de cardinal 2^{n-p} (deux choix par coordonnée non fixée) d'où

   $$P\left(\bigcap_{k=1}^{p} (X_{i_k} = x_k)\right) = \frac{2^{n-p}}{2^n} = \frac{1}{2^p} = \prod_{k=1}^{p} P(X_{i_k} = x_k).$$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{P}(\omega), P)$ un espace probabilisé fini, toutes deux de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$, indépendantes. Soit $Z = |X - Y|$. Examiner l'indépendance deux à deux de X, Y et Z puis leur indépendance mutuelle. Qu'en déduit-on que l'on savait déjà pour les familles d'événements.

Proposition 35.

Soit $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini. Si $(X_1, \cdots, X_n)$ est une famille de variables aléatoires sur Ω mutuellement indépendantes, alors toute famille d'événements $(A_1, \cdots, A_n) \in \prod_{k=1}^{n} \mathcal{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(X_i \in A_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont mutuellement indépendants.

Proposition 36 (Lemme des coalitions)**.**

Soient $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ un espace probabilisé fini, $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes sur Ω.
Soit $p \in [\![1, n]\!]$, f une fonction définie sur $\prod_{k=1}^{p} \mathcal{P}(X_i(\Omega))$ et g une fonction définie sur $\prod_{k=p+1}^{n} \mathcal{P}(X_i(\Omega))$. Alors $f(X_1, \cdots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \cdots, X_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes.

La démonstration est hors programme.

6.2 Retour sur les variables al'éatoires binomiales

Proposition 37.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0, 1]$ et $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$. Alors :

$$X_1 + \cdots + X_n \mathcal{B}(n, p)$$

Démonstration : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H(n)$ l'assertion :

"Si $X_1, \cdots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$ alors $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$ "

- Soit X_1 une variable aléatoire. On sait déjà que $X_1 \sim \mathcal{B}(p) \iff X_1 \sim \mathcal{B}(1, p)$, donc $H(1)$ est vraie.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $H(n)$ soit vraie.

Soient $X_1, \cdots, X_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$. On pose $Y = X_1 + \cdots X_n$. D'après $H(n)$, $Y \sim \mathcal{B}(n, p)$ et d'après le lemme des coalitions, Y et X_{n+1} sont des variables aléatoires indépendantes. Soit $k \in [\![1, n+1]\!]$, appliquer la formule des probabilités totales au système complet d'événements $((X_{n+1} = 1), (X_{n+1} = 0))$ donne donc :

$$\begin{array}{rcl}
P(Y + X_{n+1} = k) & = & P((X_{n+1} = 1) \cap (Y + X_{n+1} = k)) + P((X_{n+1} = 0) \cap (Y + X_{n+1} = k)) \\
& = & P((X_{n+1} = 1) \cap (Y = k - 1)) + P((X_{n+1} = 0) \cap (Y = k)) \\
& = & P(X_{n+1} = 1)P(Y = k - 1)) + P(X_{n+1} = 0)P(Y = k)) \\
& = & p\binom{n}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n+1-k} + (1-p)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \\
& = & \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right)p^k(1-p)^{n+1-k}
\end{array}$$

La formule du Pascal permet alors de conclure :

$$P(Y + X_{n+1} = k) = \binom{n+1}{k}p^k(1-p)^{n+1-k}$$

Le cas $k = 0$ se traite de même :

$$\begin{array}{rcl}
P(Y + X_{n+1} = 0) & = & P((X_{n+1} = 1) \cap (Y + X_{n+1} = 0)) + P((X_{n+1} = 0) \cap (Y + X_{n+1} = 0)) \\
& = & 0 + P((X_{n+1} = 0) \cap (Y = 0)) \\
& = & P(X_{n+1} = 0)P(Y = 0)) \\
& = & (1-p)(1-p)^n \\
& = & \binom{n+1}{0}p^0(1-p)^{n+1-0}
\end{array}$$

Ainsi $Y + X_{n+1} \sim \mathcal{B}(n+1, p)$.
Ainsi si $H(n)$ est vraie alors $H(n+1)$ est vraie.
Le principe de récurrence permet ainsi de conclure. ■

• Un résultat de loi binomiale peut donc s'interpréter comme le nombre de succès obtenus lors de la répétition de n expériences indépendantes, ayant chacune la probabilité p de succès.

• **Application :** on retrouve l'expression de l'espérance et de la variance d'une loi binomiale. Pour cela on considère $(X_1, \cdots, X_n)$ une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et on note $Y = X_1 + \cdots, +X_n$. D'après la proposition précédente, la variable Y suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$. On a donc

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

Ceci n'utilise que la linéarité de l'espérance. En utilisant l'indépendance mutuelle des X_i, on calcule :

$$\mathbf{V}(Y) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{V}(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p)$$

6.3 Une première version de la loi faible des grands nombres

Considérons, pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, n variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$, mutuellement indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. On peut regarder ces variables comme rendant compte de n réalisations indépendantes d'une même expérience aléatoire. La variable X_i vaut 1 si la ième réalisation de l'expérience est un succès, 0 sinon. Le nombre p représente la probabilité qu'une réalisation donnée de l'expérience soit un succès. On s'intéresse à la fréquence empirique des succès, c'est à dire

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

On va donner ici un premier résultat montrant que, dans un certain sens, cette fréquence empirique se rapproche de la "fréquence théorique" p lorsque n devient grand. Notons $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$. D'après le paragraphe précédent, Y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, ce qui implique notamment $\mathbf{V}(Y) = np(1-p)$. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'écrire :

$$P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = P(|X - \mathbf{E}(X)| \geq n\varepsilon) \leq \frac{\mathbf{V}(Y)}{n^2\varepsilon^2}$$

D'où

$$\boxed{P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}}$$

Lorsque n tend vers $+\infty$, on voit que la probabilité que la fréquence empirique soit "loin " de p (i.e. à une distance plus grande qu'un ε fixé) tend vers 0.