Lycée Condorcet Juin 2025
PCSI

Variables aléatoires réelles finies

1 Variable aléatoire sur un univers fini

Exercice 1. On effectue deux lancers indépendants d'un dé à 6 faces équilibré. Soit X_1 la variable aléatoire qui donne le résultat du premier lancer. Soit X_2 celle qui donne le résultat du deuxième lancer.

1. Préciser l'ensemble Ω des résultats possibles. Expliciter, pour $\omega \in \Omega$, $X_1(\omega)$ et $X_2(\omega)$.
2. Soit E l'évènement $[X_1 \leq X_2]$. Soit F l'évènement $[\max(X_1, X_2) = 6]$. Expliciter E et F.
3. On pose $X = \mathbf{1}_E + \mathbf{1}_F$.
   (a) Préciser $X(\Omega)$, et pour chaque $x \in X(\Omega)$, $P(X = x)$.
   (b) Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.

Exercice 2. Une urne contient 3 boules blanches, 3 rouges et 5 noires. On tire 3 boules. On reçoit un euro pour chaque boule blanche tirée, on paye un euro pour chaque boule rouge tirée. On note X le gain total.

1. Donner la loi de X.
2. Calculer la probabilité de gagner de l'argent.
3. Calculer $\mathbf{E}(X)$.

Exercice 3. Un sac contient 6 jetons. Un seul de ces jetons est blanc, deux sont jaunes, et trois sont verts. On effectue des tirages successifs sans remise d'un jeton à la fois (on mélange le sac après chaque tirage), jusqu'à ce que le sac ne contienne plus que des jetons de deux couleurs différentes.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de tirages qu'il a fallu effectuer.
Déterminer la loi de X. Calculer $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.
On utilisera les notations suivantes : pour $k \in \mathbb{N}^*$, on notera B_k l'évènement « un jeton blanc a été tiré au $k^{\text{ème}}$ tirage ». Même chose avec J_k et V_k, évènements relatifs aux jetons jaunes et verts.

Exercice 4. Une urne contient 20 boules, dont 8 sont blanches, les autres étant noires. On effectue 5 tirages sans remise, et on note X la variable aléatoire qui renvoie le nombre de boules blanches tirées.
Déterminer la loi de X.

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé (Ω, P) à valeurs dans $[\![0, n]\!]$. On suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{\lambda}{k+1}.$$

1. Que vaut λ ?
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 6. Une urne contient 9 boules, dont 3 sont jaunes, les autres étant rouges. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On effectue n fois l'opération suivante : on tire simultanément 3 boules, on gagne un euro si l'une des boules est jaune, on ne gagne rien sinon ; enfin on replace les boules dans l'urne (et on mélange).

1. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i le gain lors du $i^{\text{ème}}$ tirage (et seulement celui-ci). Quelle est la loi de X_i ?
2. On note X le gain total. Quelle est la loi de X ?
3. Donner $\mathbf{E}(X)$ et $\mathbf{V}(X)$.
4. On pose $Y = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$. Calculer $\mathbf{E}(Y)$ et $\mathbf{V}(Y)$.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n urnes numérotées de 0 à n contenant chacune n boules, et d'une pièce dont la probabilité d'appartition de "pile" est $p \in]0,1[$. L'urne numéro k contient k boules portant le numéro 1 et $n-k$ boules portant le numéro 0.
On lance n fois la pièce et on tire une boule dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de "pile" obtenus. On note X la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée et Y la variable aléatoire égale au nombre de "piles" obtenus.

1. Déterminer la loi de Y.
2. Déterminer la loi de X.
3. On a tiré une boule numéro 1. Quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de l'urne n ?

Exercice 8. Soit $n \geq 2$, un entier naturel. On dispose de n urnes numérotées de 1 à n. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, l'urne numéro k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit une urne au hasard (avec équiprobabilité) puis on tire une boule dans cette urne. On note X le numéro de l'urne choisie et Y le numéro de la boule tirée.

1. Déterminer la loi et l'espérance de X.
2. En déduire que
$$\forall k \in [\![1,n]\!], P(Y=k) = \frac{1}{n}\sum_{l=k}^{n}\frac{1}{l}$$
3. Calculer l'espérance de Y.

Exercice 9. On téléphone à n personnes. Chaque personne a une probabilité $p \in]0,1[$. de répondre à l'appel. On note X_1 le nombre de personnes qui répondent à ce premier appel.
On effectue ensuite une deuxième vague d'appels à destination des personnes qui n'ont pas répondu la première fois. On note X_2 le nombre de personnes qui répondent au deuxième appel.

1. Quelle est la loi de X_1 ? Justifier votre réponse.
2. Soient j et k deux entiers de $[\![0,n]\!]$.
   (a) Si $k > n-j$, que dire des événements $(X_1 = j)$ et $(X_2 = k)$?
   (b) Supposons $k \in [\![0, n-j]\!]$. Donner $P(X_2 = k | X_1 = j)$ (pas de calculs ! seul un raisonnement est attendu).
   (c) Calculer $P(X_2 = k)$.
3. Quelle loi usuelle suit X_2 ? Pouvez-vous retrouver ce résultat par un raisonnement qualitatif ?

Exercice 10.
On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire. On répète l'expérience suivante : on tire une boule dans l'urne et on remet cette boule dans l'urne en ajoutant aussi une boule de la même couleur. Notons, pour $n \geq 1$, X_n le nombre de boules blanches dans l'urne après n tirages. Montrer que X_n suit la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n+1\}$.

Exercice 11. Une compagnie aérienne pratique le *surbooking*. Sur un vol de 380 sièges, elle a vendu 390 billets. La probabilité qu'un voyageur ayant acheté un ticket se présente à l'embarquement est 0.95. On suppose la situation modélisée par un espace probabilisé (Ω, P).

1. Numérotons les personnes ayant acheté un ticket et notons A_i l'événement « le voyageur i se présente à l'embarquement ». On va supposer que les événements $(A_i)_{1\leq i\leq 390}$ sont indépendants. Cela vous paraît-il raisonnable ?
2. Soit $X : \Omega \to \{0, \ldots, 390\}$ la variable aléatoire donnant le nombre de voyageurs se présentant effectivement à l'embarquement. Quelle est la loi de X ? Donner une expression théorique de la probabilité qu'au moins un voyageur se présentant à l'embarquement n'ait pas de siège.

3. Majorer cette probabilité à l'aide de l'inégalité de Markov, puis de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Commenter, sachant que l'utilisation d'un logiciel de calcul nous donne que cette probabilité vaut environ 2.3%.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'expérience aléatoire suivante : on joue n fois à pile ou face avec une pièce équilibrée. Si le nombre de fois où l'on a obtenu pile est non nul, on note ce résultat. Sinon, on refait n lancers, et on note le nombre de fois où l'on a obtenu pile (on s'arrête là, même si l'on a encore obtenu zéro fois pile).
Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre noté. Donner la loi de X. Calculer $\mathbf{E}(X)$.

Exercice 13. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,p)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Donner (puis reconnaître) la loi de $Y = n - X$.

Exercice 14. Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times]0,1[$ et X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p. Calculer l'espérance et la variable aléoatoire $Y = 2^X$.

Exercice 15. Une puce se déplace sur un axe gradué : initialement à l'origine, elle se déplace d'une unité sur la droite avec la probabilité $p \in]0,1[$, ou de deux unités vers la droite, avec une probabilité $1-p$.
On note X_n la position de la puce après n sauts, et Y_n le nombre de sauts d'une unité parmi ces n sauts.

1. Déterminer la loi de Y_n puis en déduire celle de X_n.
2. Donner, sans calcul, l'espérance et la variance de X_n.

2 Variables aléatoires (au pluriel !)

Exercice 16. Soient $X_1, \ldots, X_n$ n variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1/2)$. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on note $A_k = \{X_k \neq X_{k+1}\}$. Montrer que les événements (A_k) sont deux à deux indépendants. Plus difficile : montrer qu'ils sont mutuellement indépendants.

Exercice 17. Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, P). On suppose qu'elles sont indépendantes, que X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n_1, p)$ et Y suit la loi $\mathcal{B}(n_2, p)$.

Exercice 18. Soit (Ω, P) un espace probabilisé et $(X,Y) : \Omega \to \{0,1,2\}$ un couple de variables aléatoires, dont la loi conjointe est donnée par les probabilités $P(X=x, Y=y)$ données par

$x \backslash y$	0	1	2
0	$\frac{3}{15}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{15}$
1	$\frac{2}{15}$	0	?
2	$\frac{1}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{2}{15}$

1. Que vaut $P(X=1, Y=2)$?
2. Donner les lois marginales de X et Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $E(X+Y)$.
5. Calculer $V(X+Y)$.

Exercice 19.
Soient, sur un espace (Ω, P) des variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$ mutuellement indépendantes et suivant chacune la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Soit

$$M = \max(U_1, U_2, \ldots, U_n).$$

Que vaut $M(\Omega)$? En vous intéressant d'abord aux probabilités $P(M \leq k)$, donner la loi de M.

Exercice 20.
Soient $(X_1, \ldots, X_n, N)$ une famille de variables aléatoires réelles sur un espace probabilisé fini (Ω, P). On suppose

que ces variables sont mutuellement indépendantes, que $X_1, \ldots, X_n$ ont même loi, et que N prend des valeurs entières entre 1 et n. Soit $S_N = X_1 + \ldots X_N$ la variable aléatoire définie par

$$S_N : \begin{cases} \Omega & \to \quad \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto \quad \displaystyle\sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega) \end{cases}$$

Calculer l'espérance et la variance de S_N en fonction de celles de X_1 et de N.