

Séries numériques

Table des matières

1 Généralités	1
1.1 Définitions	1
1.2 Opération et condition nécessaire de convergence	2
1.3 Séries usuelles	4
1.3.1 Séries télescopiques	4
1.3.2 Séries géométriques	4
1.3.3 Série exponentielle	5
2 Séries à termes positifs	5
2.1 Définition et propriétés	5
2.2 Séries de Riemann	8
3 Convergence absolue	10
4 Plan d'étude d'une série numérique	12

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.

On appelle **série numérique** tout couple $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}})$ formé d'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

On note $\sum_{n \geq 0} u_n$ la série $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}})$, ou de façon abrégée, $\sum u_n$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, le terme u_n s'appelle le **terme général** de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$; la somme $\sum_{k=0}^n u_k$ s'appelle la $n^{\text{ème}}$ **somme partielle** de la série.

Exemple 1

1. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n$. Les sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ sont les $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$, ($n \in \mathbb{N}$).
2. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$ et considérons la série $\sum_{n \geq 0} v_n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on reconnaît une somme télescopique ainsi la $n^{\text{ème}}$ somme partielle de la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est

$$\sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0.$$

La suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ est la suite $(u_{n+1} - u_0)_{n \in \mathbb{N}}$.

- **Remarque.** Il arrive que le rang de départ de la suite et de la série associée ne soit pas 0. Pour $n_0 \in \mathbb{N}$, la série associée à la suite réelle $(u_n)_{n \geq n_0}$ est notée $\sum_{n \geq n_0} u_n$, et les sommes partielles sont les $\sum_{k=n_0}^n u_k$, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$.

Définition 2.

1. On dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **converge** (ou : **est convergente**) si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des sommes partielles converge.

Dans ce cas, la limite de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée la **somme** de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$, et on note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

2. Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ ne converge pas, on dit qu'elle **diverge** (ou : qu'elle est **divergente**).
3. Deux séries sont dites **de même nature** si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Exemple 2

1. Étudier la nature de la série de terme général $\frac{1}{n(n+1)}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).
2. Étudier la nature de la série de terme général 1.
3. Étudier la nature de la série de terme général $(-1)^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Définition 3.

Supposons que $\sum_{n \geq 0} u_n$ soit une série convergente. Pour $n \in \mathbb{N}$, on appelle $n^{\text{ème}}$ **reste** de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ la somme

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

On a ainsi $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S_n + R_n$, et $R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

1.2 Opération et condition nécessaire de convergence

Proposition 4.

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries.

1. Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont convergentes et si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. La série $\sum_{n \geq 0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

2. Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente et $\sum_{n \geq 0} v_n$ est divergente alors $\sum_{n \geq 0} u_n + v_n$ est une série divergente.

• **Remarque : Attention !**

Il est possible que la série $\sum_{n \geq 0} u_n + v_n$ converge alors que les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ divergent. Par exemple les séries

$\sum_{n \geq 0} 1$ et $\sum_{n \geq 0} -1$ divergent toutes les deux alors que $\sum_{n \geq 0} 1 - 1$ converge !

On ne peut donc pas scinder cette somme en deux sommes sans vérifier au préalable que ces deux séries convergent.

Proposition 5.

On ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre **fini** de termes.

Démonstration : Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries qui diffèrent d'un nombre fini de termes. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $u_n = v_n$.

Notons $(U_n)_{n \geq 0}$ et $(V_n)_{n \geq 0}$ les sommes partielles de, respectivement, $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$. Si $n \geq N$ on a alors

$$U_n - V_n = \sum_{k=0}^{N-1} (u_k - v_k) = A$$

Ainsi pour n assez grand on a :

$$U_n = V_n + A$$

Ces deux suites et donc les deux séries ont la même nature. ■

Proposition 6.

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série.

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

La réciproque est fautive.

Démonstration : Supposons que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge vers S . On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k$$

Ainsi par somme de limite on obtient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $S - S = 0$. ■

Pour montrer que la réciproque est fautive nous allons montrer que la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente. C'est un exercice que nous avons déjà traité en td.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

2. En déduire le comportement de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$$

• **Vocabulaire.** Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est une série telle que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ **diverge grossièrement**.

Exemple 3

La série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ diverge grossièrement.

Méthode.

La première chose à faire quand on étudiera une série sera de vérifier si le terme général tend vers 0. Si ce n'est pas le cas cela signifiera que la série ne converge pas. Si c'est le cas il faudra continuer l'étude.

1.3 Séries usuelles

1.3.1 Séries télescopiques

Proposition 7.

Soit $u = (u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite. La suite u et la série $\sum (u_{k+1} - u_k)$ ont même nature en terme de convergence.

Démonstration : En utilisant le résultat sur les sommes télescopiques, on montre que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_0$$

Ainsi si u converge vers $l \in \mathbb{C}$, alors $\sum u_k$ converge vers $l - u_0$. Réciproquement si $\sum u_k$ converge vers l' alors u converge vers $l' + u_0$. ■

1.3.2 Séries géométriques

Proposition 8.

La série de terme général z^n converge si et seulement si $|z| < 1$ et sa somme est alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Démonstration :

- si $|z| \geq 1$, alors $|z^n| \geq 1$, et la suite (z^n) ne converge pas vers 0, donc la série diverge grossièrement.
- Si $|z| < 1$, on a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{k=0}^n z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \xrightarrow{|z| < 1} \frac{1}{1 - z}$$
 ■

Proposition 9.

Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$.

- La série $\sum_{n \geq 1} nx^{n-1}$ converge, et $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.
- La série $\sum_{n \geq 2} n(n-1)x^{n-2}$ converge, et $\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.

1.3.3 Série exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}$, considérons la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ appelée série exponentielle.

Proposition 10.

La série de terme général $\frac{z^n}{n!}$ est convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$, et sa somme est alors :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)$$

Démonstration : Soit f la fonction réelle à valeurs complexe définie par $f : x \mapsto \exp(zx)$. Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ et sa dérivée n -ième est $x \mapsto z^n \exp(zx)$, et on a donc en appliquant l'inégalité de Taylor Lagrange sur $[0, 1]$:

$$\left| f(1) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \right| = \left| \exp(z) - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!} \sup_{0 \leq x \leq 1} |z^{n+1} \exp(zx)|$$

En notant $z = a + ib$, on obtient $|\exp(zx)| = \exp(ax) \leq \exp(|a|)$ pour $0 \leq x \leq 1$. On en déduit :

$$\left| \exp(z) - \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \exp(|a|).$$

On conclue avec le théorème d'encadrement en notant que, d'après les croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. ■

Exemple 4

Montrer que $\sum \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}$ converge et déterminer sa somme.

2 Séries à termes positifs**2.1 Définition et propriétés****Définition 11.**

On dit d'une série numérique $\sum_{n \geq 0} u_n$ qu'elle est **à termes positifs** si : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$.

Soit $\sum_n$ une série à termes positifs. Alors la suite des sommes partielles $(S_n)_{n \geq 0}$ est croissante, puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} - S_n = u_{n+1}$. Par le théorème de la limite monotone, on obtient :

Proposition 12.

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

1. La série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la suite des sommes partielles est majorée :

$$\sum u_n \text{ converge} \iff \exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n u_k \leq M$$

2. Si la série $\sum u_n$ diverge, alors on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_k = +\infty$.

Proposition 13.

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.

1. Si la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge. Alors la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
2. Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge alors la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Démonstration : Notons $(U_n)_{n \geq 0}$ et $(V_n)_{n \geq 0}$ la suite des sommes partielles de respectivement $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$.

1. Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq U_n \leq V_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

Donc la suite des sommes partielles $(U_n)_{n \geq 0}$ est majorée. Le théorème de la limite monotone permet donc de conclure que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge. On a de plus,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k$$

2. Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge, comme c'est une série à terme positif elle tend vers $+\infty$ mais on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n \leq V_n$$

La théorème de comparaison permet ainsi de conclure que $\sum_{n \geq 0} v_n$ tend vers $+\infty$. ■

• **Remarque.** Si l'on suppose seulement qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$, alors on a : si la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, mais, dans ce cas, on ne peut pas comparer les sommes (car on n'a pas d'information sur la valeur des premiers termes).

Proposition 14.

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs. Supposons que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$ (c'est en particulier le cas si $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n)$).

1. Si $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.
2. Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge alors $\sum_{n \geq 0} v_n$ diverge.

Démonstration : Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$, alors :

$$\exists M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \quad |u_n| \leq M|v_n|$$

Puisque $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont à termes positifs, on a donc, pour tout $n \geq n_0$

$$u_n \leq Mv_n$$

Le théorème précédent permet donc de conclure. ■

- **Remarques**

1. **Attention !** Cette proposition ne permet pas de conclure quoique ce soit sur les éventuelles limites !
2. Le résultat reste valable si l'on suppose seulement (outre le fait que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n)$) que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang (i.e. il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, on ait $v_n \geq 0$).
3. Dans la proposition, si l'on ne suppose plus la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ à termes positifs, le résultat n'est plus valable. Par

exemple, posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. On a $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n)$.

On peut montrer que la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ converge. En revanche, la série $\sum_{n \geq 1} u_n$, qui est appelée **série harmonique**, est divergente. On montrera cela plus loin.

Exemple 5

Soit $\alpha \in]2, +\infty[$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$. La série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

En effet, on a, puisque $\alpha > 2$, $\frac{1}{n^\alpha} \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$. Or on a vu que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente. On en

déduit, puisque les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ sont à termes positifs, que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente.

Proposition 15.

Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs. On suppose que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$.

Alors les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ sont de même nature.

Démonstration : Si $u_n \sim v_n$, on a en particulier $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$. En appliquant le théorème précédent pour ces deux relations, on obtient le résultat. ■

- **Remarques**

1. **Attention !** En cas de convergence, les limites ne sont en général pas égales !
2. Le résultat reste valable si l'on suppose seulement les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positives à partir d'un certain rang (et équivalentes, bien sûr).
3. Dans la proposition, si l'on ne suppose plus les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ à termes positifs, le résultat n'est plus

valable. Par exemple, posons pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

On a $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$. De plus, on a déjà vu que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est convergente. Pourtant, la série $\sum_{n \geq 0} v_n$ est divergente.

Exemple 6

1. On sait que $\frac{1}{n^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n(n+1)}$, donc par comparaison des séries à termes positifs, puisque la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

2. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - \exp\left(\frac{1}{n^2}\right) \right)$ est convergente.

Remarquer toutefois que les séries $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$ et $\sum_{n \geq 1} \exp\left(\frac{1}{n^2}\right)$ divergent grossièrement.

2.2 Séries de Riemann

Proposition 16.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Si $\alpha \leq 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.
- Si $\alpha > 1$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Démonstration. Si $\alpha \leq 0$, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge grossièrement. On suppose dans la suite que $\alpha > 0$.

L'application $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a : pour tout $t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$. On en déduit que

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k^\alpha} dt = \frac{1}{k^\alpha}. \quad (1)$$

Si l'on a $k \geq 2$, on peut aussi écrire que pour $t \in [k-1, k]$, $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$, donc en intégrant :

$$\frac{1}{k^\alpha} = \int_{k-1}^k \frac{1}{k^\alpha} dt \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{t^\alpha} dt. \quad (2)$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On déduit de l'inégalité (1), par somme, que :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}. \quad (3)$$

On déduit de l'inégalité (2), par somme, que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt. \quad (4)$$

On discute maintenant suivant les valeurs de α .

— Supposons $\alpha < 1$.

On a

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \right]_1^{n+1} = \frac{1}{1-\alpha} (n+1)^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$$

car $1 - \alpha > 0$. On en déduit, par l'inégalité (3), que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

— Supposons $\alpha = 1$.

On a

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t} dt = \left[\ln(t) \right]_1^{n+1} = \ln(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

On en déduit, par l'inégalité (3), que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ (c'est la **série harmonique**) diverge.

— Supposons $\alpha > 1$.

On a

$$\int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1}{1-\alpha} t^{1-\alpha} \right]_1^n = \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} (1 - n^{1-\alpha}) \leq \frac{1}{\alpha-1}$$

car $\alpha - 1 > 0$. Avec l'inégalité (4), on obtient :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}.$$

Donc la suite $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, qui est croissante (c'est la suite des sommes partielles d'une série à termes positifs),

est aussi majorée. Elle est donc convergente, autrement dit : la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge. □

Exemple 7

1. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.
2. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.
3. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge.
4. La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge.

Méthode.

On a employé une méthode de **comparaison série/intégrale**. Voici le schéma général.

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Supposons que $f : [n_0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ soit une application continue et décroissante sur $[n_0, +\infty[$. Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq n_0$, on a : $\forall t \in [k, k+1]$, $f(t) \leq f(k)$, et donc en intégrant,

$$\int_k^{k+1} f(t) dt \leq \int_k^{k+1} f(k) dt = f(k).$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq n_0 + 1$, on a : $\forall t \in [k-1, k]$, $f(k) \leq f(t)$, donc en intégrant,

$$f(k) = \int_{k-1}^k f(k) dt \leq \int_{k-1}^k f(t) dt.$$

On déduit par somme, comme dans la démonstration, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$,

$$\int_{n_0}^{n+1} f(t) dt \leq \sum_{k=n_0}^n f(k) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^n f(t) dt.$$

Prendre garde à sortir le premier terme pour le membre de droite.

Selon les situations (la convergence ou non de $\int_{n_0}^{n+1} f(t) dt$ quand n tend vers $+\infty$) on peut conclure par les théorèmes de comparaison, de limite monotone ou d'encadrement.

Cette double inégalité permet souvent de trouver des équivalents en $+\infty$.

- **Remarque. À propos de la série harmonique.** On a vu que pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\underbrace{\int_1^{n+1} \frac{dt}{t}}_{\ln(n+1)} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \underbrace{\int_1^n \frac{dt}{t}}_{\ln n}. \quad (*)$$

On en déduit (exercice) que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln n.$$

On peut aussi montrer¹ qu'il existe un réel γ tel que $\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \gamma$. Cette constante s'appelle la **constante**

d'Euler. On peut aussi vérifier que $0 < \gamma < 1$.

Finalement, on peut écrire

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

t $\lambda \in \mathbb{R}$, la série $\sum_{k \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ converge, et $\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = 1$.

3 Convergence absolue

Définition 17.

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série.

On dit que $\sum_{n \geq 0} u_n$ est **absolument convergente** si la série à termes positifs $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est convergente.

1. On peut pour cela utiliser des suites adjacentes bien choisies : cf, dans la feuille d'exercices sur les suites, l'exercice 6 (question 2), ou aussi l'exercice 5 de la feuille supplémentaire d'exercices sur les suites.

La proposition suivante va nous permettre, dans le cas où la série que l'on étudie n'est pas à termes positifs de nous ramener à l'étude d'une série à termes positifs.

Proposition 18.

Si la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Démonstration : • Supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n & \text{si } u_n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad u_n^- = \begin{cases} -u_n & \text{si } u_n \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_n^+ - u_n^-$. De plus on a les inégalités pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_n^+ \leq |u_n| \\ 0 &\leq u_n^- \leq |u_n| \end{aligned}$$

Comme $\sum |u_n|$ converge, d'après le critère de comparaison des séries à termes positifs les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent. Ainsi

$$\sum u_n = \sum (u_n^+ - u_n^-)$$

converge. ■

• **Remarque. La réciproque est fausse.**

En effet, on a déjà vu que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente, alors que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

Autrement dit, la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente sans être absolument convergente.

Exemple 8

Etudier les convergences des séries

1. $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(n^3 + 2n^2 + 3)}{n^2 + 1}$
2. $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in}}{n^2}$
3. $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{e^n}$

Proposition 19.

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Soient $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries absolument convergentes.

1. On a $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.
2. Alors la série $\sum_{n \geq 0} (\lambda u_n + \mu v_n)$ est absolument convergente et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| + |\mu| \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|$$

Démonstration : 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\left| \sum_{k=0}^n u_k \right| \leq \sum_{k=0}^n |u_k|$$

Comme les deux séries convergent (car $\sum u_n$ converge absolument donc converge), en passant cette inégalité à la limite, on a le résultat voulu.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Toujours en utilisant l'inégalité triangulaire, on a :

$$\sum_{k=0}^n |\lambda u_k + \mu v_k| \leq |\lambda| \sum_{k=0}^n |u_k| + |\mu| \sum_{k=0}^n |v_k| \leq |\lambda| \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k| + |\mu| \sum_{k=0}^{+\infty} |v_k|$$

Ainsi, les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum |\lambda u_k + \mu v_k|$ sont majorées. Donc cette série converge, et $\sum \lambda u_k + \mu v_k$ converge absolument. On obtient de plus en passant à la limite dans l'inégalité précédente :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\lambda u_n + \mu v_n| \leq |\lambda| \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| + |\mu| \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|$$

• **Remarque :** Comme la série de terme général nulle est absolument convergente, nous venons de montrer que l'ensemble des séries absolument convergentes est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Proposition 20.

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. Si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$ et si $u_n = O(v_n)$.

Alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente.

Démonstration : En effet si $u_n = O(v_n)$, alors il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|u_n| \leq M|v_n|$, c'est à dire $0 \leq |u_n| \leq M v_n$ puisque v est à terme positif. Or $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge. Par théorème de comparaison de séries à termes positifs, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est absolument convergente.

Exemple 9

Montrer que la série $\sum \frac{\sin n}{n^{3/2} + \cos n}$ converge.

4 Plan d'étude d'une série numérique

Considérons une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ à termes quelconques. Pour montrer que $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, on vérifie, dans l'ordre :

1. Si son terme général tend vers 0.
2. Si elle est de signe constant :
 - On se ramène à une série à termes positifs.
 - On applique les théorèmes de comparaison/dominance/équivalence avec/par des séries de références (géométrique, Riemann, exponentielle)
3. Si elle est de signe quelconque :
 - On étudie la convergence absolue de la série.