

Exemple de sous-algèbre commutative de $M_n(\mathbb{K})$

Dans cette partie $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Pour tout $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, on pose :

$$J(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & \cdots & a_1 \\ a_1 & a_0 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le coefficient d'indice (i, j) de $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ est a_{i-j} si $i \geq j$ et a_{i-j+n} si $i < j$.

Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des matrices de $M_n(\mathbb{K})$ de la forme $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ où $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in M_n(\mathbb{K})^n$.

A-I) Une sous-algèbre de $M_n(\mathbb{K})$.

1. Considérons φ l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à J et $\mathcal{B}_c = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
 - (a) Calculer pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi(e_j)$.
 - (b) En déduire pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\varphi^k(e_j)$.
 - (c) Écrire sans justification les matrices J^2 , J^k et J^n où $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$.
 - (d) Exprimer pour tout $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$, $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ en fonction des J^k où $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.
2. Montrer que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$ dont vous donnerez une base.
3. Soit M une matrice de $M_n(\mathbb{K})$. Montrer que M commute avec J si et seulement si M commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}$.
4. Montrer que $\mathcal{A}$ est une sous-algèbre commutative de $M_n(\mathbb{K})$.

A-II) Diagonalisation de J puis de $\mathcal{A}$.

Notons $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, notons

$$C_k = \begin{pmatrix} (\omega^k)^{n-1} \\ (\omega^k)^{n-2} \\ \vdots \\ \omega^k \\ 1 \end{pmatrix}$$

et Q la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ formée des n colonnes dans l'ordre $C_0, C_1, \dots, C_{n-1}$.

1. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $J C_k = \omega^k C_k$.
2. On considère l'application linéaire f de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$

qui à un polynôme P associe la matrice colonne $\begin{pmatrix} P(\omega^{n-1}) \\ P(\omega^{n-2}) \\ \vdots \\ P(\omega) \\ P(1) \end{pmatrix}$.

- (a) Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
 - (b) Montrer que la matrice de f exprimée dans les bases canoniques de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et de $\mathbb{C}^n$ est la matrice Q .
 - (c) En déduire que $(C_0, \dots, C_{n-1})$ est une base de $\mathbb{C}^n$.
3. Écrire D , la matrice de φ dans la base $(C_0, \dots, C_{n-1})$.
 4. Justifier que $Q^{-1} J Q = D$.
 5. Montrer que pour tout A dans $\mathcal{A}$, $Q^{-1} A Q$ est une matrice diagonale.

1. (a) Par définition de φ , $\varphi(e_j)$ est la j ème colonne de J , ou plus rigoureusement le n -uplet dont les coordonnées sont données par cette colonne. On lit donc

$$\forall j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad \varphi(e_j) = e_{j+1} \quad \text{et} \quad \varphi(e_n) = e_1.$$

- (b) On a

$$\forall j \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket \quad \varphi^2(e_j) = \varphi(e_{j+1}) = e_{j+2}, \quad \varphi^2(e_{n-1}) = \varphi(e_n) = e_1 \quad \text{et} \quad \varphi^2(e_n) = \varphi(e_1) = e_2.$$

Plus généralement, pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\forall j \in \llbracket 1, n-k \rrbracket \quad \varphi^k(e_j) = e_{j+k} \quad \text{et} \quad \forall j \in \llbracket n-k+1, n \rrbracket \quad \varphi^k(e_j) = e_{j-(n-k)}.$$

- (c)

$$J^2 = \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{2,n-2} & I_2 \\ I_{n-2} & 0_{n-2,2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J^k = \begin{pmatrix} 0_{k,n-k} & I_k \\ I_{n-k} & 0_{n-k,k} \end{pmatrix} \quad (1 \leq k \leq n-1).$$

De plus, $J^n = I_n$.

- (d) Soit $(a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. On a

$$J(a_0, \dots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k.$$

2. On vient de montrer que

$$\mathcal{A} = \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k, (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n \right\} = \text{Vect}(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1}).$$

Ceci démontre que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel, engendré par la famille $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$. Si $a_0, \dots, a_{n-1}$ sont n scalaires de $\mathbb{K}$ tels que $\sum_{k=0}^n a_k J^k = 0_{n,n}$, alors $J(a_0, \dots, a_{n-1})$ est la matrice nulle, ce qui donne $a_0 = \dots, a_{n-1} = 0$ (lecture des coefficients). La famille $(I_n, J, J^2, \dots, J^{n-1})$ est donc libre; ceci achève de prouver que c'est une base de $\mathcal{A}$.

3. Si M commute avec tous les éléments de $\mathcal{A}$, il est clair qu'elle commute avec J puisque J est dans $\mathcal{A}$.

Démontrons la réciproque, en supposant que M commute avec J . Soit A une matrice de $\mathcal{A}$. Il existe $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que $A = \sum_{k=0}^n a_k J^k$. Alors,

$$MA = M \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \right) = \sum_{k=0}^n a_k M J^k = \sum_{k=0}^n a_k J^k M = \left(\sum_{k=0}^n a_k J^k \right) M = AM.$$

On a utilisé que M commute avec toute les puissances de J ce qui s'obtient par une récurrence immédiate.

4. • Nous avons montré en question 5 que $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$.

• Démontrons la stabilité par produit. Soient $A = J(a_0, \dots, a_{n-1})$ et $B = J(b_0, \dots, b_{n-1})$ deux matrices de $\mathcal{A}$. On calcule

$$AB = \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \right) \left(\sum_{p=0}^{n-1} b_p J^p \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{p=0}^{n-1} a_k b_p J^{k+p} \in \text{Vect}(I_n, J, \dots, J^{2n-2}).$$

Or, $\forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \quad J^{n+k} = J^n \cdot J^k = I_n J^k = J^k$. Ainsi,

$$\text{Vect}(I_n, J, \dots, J^{2n-2}) = \text{Vect}(I_n, J, \dots, J^{n-1}) = \mathcal{A}.$$

On a donc $AB \in \mathcal{A}$ ce qui achève de montrer que $\mathcal{A}$ est stable par produit.

• La logique de l'énoncé serait d'utiliser la question précédente... mais maintenant qu'on a développé AB au-dessus, on peut tout simplement factoriser pour obtenir $AB = BA$.

A-II) Diagonalisation de J puis de $\mathcal{A}$.

1. On identifie ici $M_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$, la matrice J et l'application φ .

$$\begin{aligned}
 JC_k &= \varphi \left(\sum_{j=1}^n (\omega^k)^{n-j} e_j \right) \\
 &= \sum_{j=1}^n (\omega^k)^{n-j} \varphi(e_j) \\
 &= \sum_{j=1}^{n-1} (\omega^k)^{n-j} e_{j+1} + (\omega^k)^{n-n} e_1 \\
 &= \sum_{l=2}^n (\omega^k)^{n-l+1} e_l + (\omega^k)^n e_1 \\
 &= \omega^k \left((\omega^k)^{n-1} e_1 + \sum_{l=2}^n (\omega^k)^{n-l} e_l \right) \\
 &= \omega^k C_k.
 \end{aligned}$$

2. (a) Un polynôme P est dans le noyau de f s'il est de degré inférieur ou égal à $n-1$ et s'il admet au moins n racines distinctes deux à deux. Ainsi, $\ker f = \{0\}$ donc f est injective. De plus, $\dim \mathbb{C}_{n-1}[X] = \dim \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ donc f est bijective.

- (b) En remarquant que pour tout $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$C_k = \begin{pmatrix} (\omega^{n-1})^k \\ (\omega^{n-2})^k \\ \vdots \\ \omega^k \\ 1 \end{pmatrix}$$

et que

$$f(X^k) = C_k$$

on en déduit que Q est la matrice de f exprimée dans les bases canoniques de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ et de $\mathbb{C}^n$.

- (c) Comme f est un isomorphisme, l'image de la base canonique de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ est une base de $\mathbb{C}^n$. Alors, la famille $(f(1), f(X), \dots, f(X^{n-1})) = (C_0, \dots, C_{n-1})$ est une base de $\mathbb{C}^n$.
3. La famille $(C_0, \dots, C_{n-1})$ est une famille libre de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n . C'est donc une base de $\mathbb{C}^n$. D'après la question a, $\varphi(C_k) = \omega^k C_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. On a donc

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \omega & & & \\ & & \omega^2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \omega^{n-1} \end{pmatrix}.$$

4. Notons Q la matrice de passage de la base canonique à la base $(C_0, \dots, C_{n-1})$ (Q est la matrice dont les colonnes sont les C_k). Cette matrice de passage est inversible et d'après la formule du changement de base,

$$Q^{-1}JQ = D.$$

5. Soit $A \in \mathcal{A}$. Il existe $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ tels que $A = \sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k$. On a

$$Q^{-1}AQ = Q^{-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_k J^k \right) Q = \sum_{k=0}^{n-1} a_k Q^{-1} J^k Q.$$

Une récurrence classique et facile permet de montrer que $\forall k \geq 0$ $Q^{-1}J^kQ = (Q^{-1}JQ)^k = D^k$. On a donc

$$Q^{-1}AQ = \sum_{k=0}^{n-1} a_k D^k,$$

qui est bien une matrice diagonale.