Lycée Condorcet — Juin 2024
PCSI

Séries numériques

Exercice 1.
Déterminer la nature des séries suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(\ln n)^2}{n^4}$ c) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n+(-1)^n\sqrt{n}}}$ d) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

e) $\displaystyle\sum n - \sin\frac{1}{n}$ f) $\displaystyle\sum n \times \sin\frac{1}{n^2}$ g) $\displaystyle\sum \frac{\sqrt{n+1}}{\ln^3(n)n^2}$

h) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ (on discutera suivant les valeurs de α)

i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(\frac{\pi}{n})$ j) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{n^n}$ k) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} n^{-\cos(\frac{1}{n})}$ l) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(\ln n)^n}{n^{\ln n}}$

m) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(n!)}$ (on pourra utiliser le résultat de l'exercice 4) n) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \left(\sqrt[n]{n+1}-\sqrt[n]{n}\right)$.

Exercice 2.
Justifier que les séries suivantes sont convergentes, et calculer leur somme.

a) $\displaystyle\sum_{k\geq 0} e^{-k}$ b) $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{k^2}{2^k}$ c) $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{k(k-1)x^k}{k!}$ où $x \in \mathbb{R}$ d) $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.

e) $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{n^2}{n!}$

Exercice 3.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\lambda^{2n}}{(2n)!}$ converge et donner la valeur de sa somme.

   On pourra poser $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^{2k}}{(2k)!}$ *et introduire une certaine somme* T_n *pour calculer* $S_n + T_n$ *et* $S_n - T_n$.

2. **Application :** Convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{4^n}{(2n)!}$ et valeur de sa somme.

Exercice 4.
Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 2} \frac{1}{k\ln k}$ diverge (on effectuera une comparaison série-intégrale, en introduisant l'application $f :]1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall t \in]1,+\infty[,\ f(t) = \dfrac{1}{t\ln t}$).

Exercice 5.
Soient α et β deux réel.
Montrer que la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha(\ln n)^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).

Exercice 6.
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante et convergente de limite nulle. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1)^n a_n$.

1. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, S_n la $n^{\text{ème}}$ somme partielle de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

   Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite l.
2. Soit $\varepsilon > 0$.
   (a) Justifié qu'il existe un couple $(n_0, n_1) \in \mathbb{N}^2$, tel que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 \Rightarrow |S_{2n} - l| < \varepsilon$$
   $$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_1 \Rightarrow |S_{2n+1} - l| < \varepsilon$$
   (b) En déduire un entier n_2, tel que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_2 \Rightarrow |S_n - l| < \varepsilon$$
   (c) En déduire que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Exercice 7. *Constante d'Euler*
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}) - \ln n$.

1. Montrer que la série $\sum_{k=1}^{n}(u_{n+1} - u_n)$ converge.
2. En déduire qu'il existe un réel γ tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$ puis donner un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Exercice 8.
Le but de cet exercice est d'étudier la nature de la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$, où x est un nombre réel fixé.

1. Montrer que pour $x \leq -1$ et $x > 1$, la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ diverge.
2. Montrer que pour $x \in]-1, 1[$, la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$ est absolument convergente.
3. On traite dans cette question le cas où $x = 1$. Montrer en utilisant le résultat de l'exercice 5 que la série $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge.
4. Dans cette question, on suppose $x \in]-1, 1]$, et on calcule la somme de la série. On pose
   $$f : \begin{array}{ccc}]-1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(1+t) \end{array}.$$
   (a) Calculer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la dérivée $k^{\text{ème}}$ de f.
   (b) Montrer que pour $x \in]-1, 1]$,
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k = \ln(1+x)$$
   (on pourra séparer les cas $x \geq 0$ et $x \leq 0$). En particulier
   $$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2.$$

Exercice 9.
Question préliminiare :
La suite (x_n) est une suite de nombres réels positifs. Montrer que si la série de terme général x_n converge, alors la série de terme général x_n^2 converge aussi.
On montrera qu'il existe un entier naturel N tel que si $n \leq N$, alors $x_n^2 \leq x_n$.
On considère, d'une part, la fonction numérique, notée ch, définie par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, et d'autre part, la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\mathrm{ch}(u_n)} \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. Etudier la fonction ch et dresser son tableau de variations.
2. Donner le développement limité à l'ordre 2 de ch au voisinage de 0.
3. (a) Montrer que la suite (u_n) est strictement positive et strictement décroissante.
   (b) En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.
4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est strictement négative.
   (b) Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.
   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1 + v_k)$. En déduire que la série de terme général v_n est divergente.
5. (a) Montrer que : $v_n \sim -\dfrac{u_n^2}{2}$.
   (b) En déduire que la série de terme général u_n^2 est divergente.
   (c) En utilisant la question préliminaire, conclure quant à la nature de la série de terme gnénral u_n.