Série $\sum \dfrac{e^{in\theta}}{n}$.

Dans cet exercice, on fixe un réel $\theta \in]0, 2\pi[$ et on s'intéresse à la série.

$$\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$$

1. Démontrer que cette série n'est pas absolument convergente.
2. Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ et $(b_n)_{n\geq 0}$ deux suites complexes. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})b_k = a_n b_n - a_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(b_k - b_{k+1}).$$
Ce calcul s'appelle *transformation d'Abel*.
3. Notons $D_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$. Calculer une expression de $D_n(\theta)$ n'utilisant pas le signe somme, et, en considérant son module, démontrer que la suite $(D_n(\theta))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
4. En utilisant 2. et, pour $k \geq 0$ l'identité $e^{ik\theta} = D_k(\theta) - D_{k-1}(\theta)$ (on pose $D_{-1}(\theta) = 0$), démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \frac{D_n(\theta)}{n} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_k(\theta)}{k(k+1)}.$$
5. Démontrer que la série $\sum \dfrac{D_n(\theta)}{n(n+1)}$ est absolument convergente.
Conclure sur la convergence de la série étudiée.
6. Justifier que les séries
$$\sum \frac{\cos(n\theta)}{n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{\sin(n\theta)}{n}$$
sont convergentes.

(*) Sont-elles absolument convergentes ?

Corrigé

1. La série des modules est $\sum \frac{1}{n}$, série harmonique, dont on sait qu'elle diverge. On s'apprête donc à étudier une série qui n'est pas absolument convergente.
2. Pour $n \geq 1$, on calcule
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1})b_k &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n} a_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_{k+1} \\ &= a_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k - a_0 b_1 - \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_{k+1} \\ &= a_n b_n - a_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k (b_k - b_{k+1}).\end{aligned}$$
3. On a déjà fait ce calcul d'une somme géométrique :
$$D_n(\theta) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k = \frac{1 - e^{i(n+1)\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{(-2i)\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{(-2i)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)},$$
d'où,
$$|D_n(\theta)| = \left|\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right| \leq \frac{1}{\sin(\theta/2)},$$
(on a ôté la valeur absolue car $\theta/2 \in]0, \pi[$), intervalle sur lequel le sinus est positif).

4. Pour tout $k \geq 0$ on a $e^{ik\theta} = D_k(\theta) - D_{k-1}(\theta)$ (en posant $D_{-1}(\theta) = 0$). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la question 2. permet d'écrire

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{ik\theta}}{k} &= \sum_{k=1}^{n} (D_k(\theta) - D_{k-1}(\theta)) \frac{1}{k} \\ &= \frac{D_n(\theta)}{n} - D_0(\theta) \cdot \frac{1}{1} + \sum_{k=1}^{n-1} D_k(\theta) \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right). \\ &= \frac{D_n(\theta)}{n} - 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{D_k(\theta)}{k(k+1)}. \qquad (*)\end{aligned}$$

5. Notons $C = \frac{1}{\sin(\theta/2)}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{D_n(\theta)}{n(n+1)} \right| \leq \frac{C}{n^2}$. On sait que la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente $(2 > 1)$ donc par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \frac{D_n(\theta)}{n(n+1)}$ converge absolument. D'après un théorème du cours, cette série est donc convergente. Puisque $(D_n(\theta))_{n \geq 0}$ est bornée, $D_n(\theta)/n \to 0$. On peut donc, en revenant à $(*)$, constater que la somme partielle de la série de départ converge. On a de plus

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = -1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{D_n(\theta)}{n(n+1)}.$$

La série étudiée est bien convergente, sans être absolument convergente. On remarque que pour $\theta = \pi$, on retrouve la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ qui fut l'exemple du cours pour une telle situation.

6. Utilisons les formules d'Euler :

$$\cos(n\theta) = \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}.$$

D'après ce qui précède, les séries $\sum \frac{e^{in\theta}}{n}$ et $\sum \frac{e^{-in\theta}}{n}$ sont convergentes. Grâce aux formules d'Euler, on obtient la convergence de $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n}$ et $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n}$ par combinaison linéaire.

On peut montrer, à l'aide de la comparaison astucieuse qui va suivre, qu'elles ne sont pas absolument convergentes. Pour $n \geq 0$, puisque $|\cos(n\theta)|$, on a

$$|\cos(n\theta)| \geq \cos^2(n\theta) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2n\theta)\right).$$

Sommons :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\cos(k\theta)|}{k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(2k\theta)}{k}.$$

Le travail précédent implique que la série $\sum \frac{\cos(2n\theta)}{n}$ est convergente. De plus, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty$. Par comparaison, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|\cos(k\theta)|}{k} \longrightarrow +\infty,$$

ce qui achève de montrer que $\sum \frac{\cos(n\theta)}{n}$ ne converge pas absolument. En adaptant les arguments on montrerait qu'il n'y a pas non plus convergence absolue pour $\sum \frac{\sin(n\theta)}{n}$.