

Espaces préhilbertiens réels

1 Produits scalaires et normes

1.1 Produits scalaires

Définition 1.

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On appelle **produit scalaire** sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est à dire toute application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui est :

- bilinéaire : $\forall (x, y, z) \in E^3, \langle \lambda x + y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$. et $\langle x, \lambda y + z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$.
- symétrique : $\forall (x, y) \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;
- définie : $\forall x \in E \quad \langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$;
- positive : $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$.

Remarque

On montre, en général, la symétrie avant la bilinéarité. Cela permet de ne montrer la linéarité que par rapport à une seule variable.

Remarque

On a, pour tout $x \in E$.

$$\langle 0, x \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0$$

Définition 2.

On appelle **espace préhilbertien réel** tout $\mathbb{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire. Si l'espace est de plus de dimension finie, on parle d'**espace euclidien**.

Exemples classiques

- L'application définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ par :

$$\left((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) \right) \longmapsto \sum_{k=1}^n x_k y_k$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

Ceci se réécrit matriciellement de la manière suivante avec $(X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$:

$$\langle X, Y \rangle = X^T \times Y$$

C'est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

- Le produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ est défini comme suit, si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ alors :

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t) \, dt$$

Exemple 1

1. Montrer que la fonction définie pour tout couple de polynôme par

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{i=0}^n P(i)Q(i)$$

est un produit scalaire.

2. Montrer que l'application définie sur $\mathcal{M}_{1,2}$ par

$$\phi(X, Y) = X^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} Y$$

est un produit scalaire.

1.2 Norme associé à un produit scalaire

Définition 3.

Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

- On appelle norme associé à ce produit scalaire l'application définie de E dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

En particulier, on dira qu'un vecteur $x \in E$ est **unitaire** s'il vérifie $\|x\| = 1$.

- On définit la **distance euclidienne** sur E par :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = \|x - y\|$$

Remarque. Attention !

La notion de norme et donc de distance dépend du produit scalaire. Dans le cas du produit scalaire défini dans l'exemple 1 sur $\mathbb{R}^2$,

$$\|(1, 0)\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{2} \neq 1$$

Le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ donne la norme usuelle et la distance usuelle.

Remarque. La norme euclidienne satisfait les propriétés suivantes :

- $\forall x \in E, \quad \|x\| \geq 0$ et $(\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

Proposition 4 (Identité remarquable).

Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x, y) \in E^2$,

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Démonstration : Soit $(x, y) \in E^2$, on a, comme le produit scalaire est bilinéaire :

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x + y \rangle + \langle y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle$$

et comme le produit scalaire est symétrique, on a bien :

$$\boxed{\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2}$$

■

Proposition 5 (Formule de polarisation).

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x, y) \in E^2$,

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$$

Démonstration : Le résultat découle immédiatement de l'identité remarquable. ■

1.3 Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Proposition 6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x, y) \in E^2$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Démonstration : Pour tout $t \in \mathbb{R}$, les propriétés du produit scalaire donnent :

$$0 \leq \|x + ty\|^2 = \langle x + ty, x + ty \rangle = \langle x, x \rangle + 2t\langle x, y \rangle + t^2\langle y, y \rangle.$$

- Si $\langle y, y \rangle = 0$, la fonction $t \mapsto \langle x, x \rangle + 2t\langle x, y \rangle$ est affine et positive sur $\mathbb{R}$ tout entier. Son coefficient directeur est donc nécessairement nul. Cela donne $\langle x, y \rangle = 0$, donc $|\langle x, y \rangle| = 0 = \|x\| \|y\|$.
- Si $\langle y, y \rangle \neq 0$, la fonction $t \mapsto \langle x, x \rangle + 2t\langle x, y \rangle + t^2\langle y, y \rangle$ est polynomiale de degré 2 et positive sur $\mathbb{R}$, son discriminant est donc négatif ou nul. Cela donne $4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \leq 0$, donc $\langle x, y \rangle^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$ et par passage à la racine (strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$), $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$.

Il y a alors égalité si et seulement si le discriminant est nul. Or le discriminant s'annule si et seulement si l'application $t \mapsto \|x + ty\|$ admet une racine et donc si et seulement si il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x + t_0 y = 0$ c'est à dire si et seulement si x et y sont colinéaires. ■

Remarque L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

- dans $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique :

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

- dans $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$:

$$\left| \int_a^b f(t)g(t) \, dt \right| \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2 \, dt} \sqrt{\int_a^b g(t)^2 \, dt}$$

Exemple 2

1. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\left(\sum_{k=1}^n x_k \right)^2 \leq n \sum_{k=1}^n x_k^2$$

et étudier le cas d'égalité.

2. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$,

$$f(1)^2 - f(0)^2 \leq 2 \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 \, dt} \sqrt{\int_0^1 f'(t)^2 \, dt}$$

Proposition 7 (Inégalité triangulaire).

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et $(x, y) \in E^2$,

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens.

Démonstration : Les propriétés de la norme et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donnent :

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

La croissance de la racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ donne alors $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Etudions maintenant le cas d'égalité. Il y a égalité si et seulement si $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$.

— Remarquons tout d'abord que si x et y sont colinéaires de même sens alors il existe $\lambda \geq 0$ tel que $y = \lambda x$ on a alors

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \lambda \|x\|^2$$

Par ailleurs on a

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

et comme λ est positif on a bien

$$\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$$

— Réciproquement supposons que $\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\|$ d'après le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne qu'il existe (quitte à permuter x et y) $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$. Il faut alors montrer que λ est positif. On a, comme ci-dessus

$$\langle x, y \rangle = \lambda \|x\|^2$$

Mais on a aussi

$$\langle x, y \rangle = \|x\|\|y\| = \|x\|\|\lambda x\| = \|x\|\sqrt{\langle \lambda x, x \rangle} = \|x\|\sqrt{\lambda^2 \langle x, x \rangle} = |\lambda| \|x\|^2$$

Ainsi soit x est nul, soit $\lambda = |\lambda|$, c'est à dire $\lambda \geq 0$. ■

Remarque.

La norme euclidienne satisfait les trois propriétés suivantes :

1. séparabilité : $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$ et $(\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$;
2. homogénéité : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;
3. inégalité triangulaire : $\forall (x, y) \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Réciproquement une application sur un espace vectoriel E satisfaisant ses trois points est appelée une norme sur E . On définit alors la distance associée. La distance ainsi définie peut être alors très différente de la notion intuitive que vous avez de distance.

2 Orthogonalité

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 8.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel

- Soit $(x, y) \in E^2$. On dit que x et y sont orthogonaux et on note $x \perp y$ lorsque $\langle x, y \rangle = 0$.
- Plus généralement, deux parties A et B de E sont **orthogonales** si

$$\forall (x, y) \in A \times B, \langle x, y \rangle = 0$$

Remarque : Attention !

La notion d'orthogonalité dépend du produit scalaire. Dans le cas du produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^2$ elle coïncide avec celle que vous connaissez déjà.

Remarque.

Soit $x \in E$ on a d'après les propriétés du produit scalaire $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Ainsi le seul vecteur orthogonal à lui-même est le vecteur nul.

Remarque.

Comme pour tout $x \in E$, $\langle x, 0 \rangle = 0$ tout vecteur est orthogonal au vecteur nul.

Théorème 9 (de Pythagore).

Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Soit $(x, y) \in E^2$, alors :

$$x \perp y \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Démonstration : Soit $(x, y) \in E$, d'après l'identité remarquable on a $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$ ainsi :

$$x \perp y \iff \langle x, y \rangle = 0 \iff \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \quad \blacksquare$$

Définition 10.

Soient $(E, \langle, \rangle)$ un espace préhilbertien réel et A une partie de E . On appelle **orthogonal de** A l'ensemble noté $A^\perp$ défini par :

$$A^\perp = \{x \in E, \forall a \in A, \langle x, a \rangle = 0\}.$$

Remarque.

D'après une des remarques précédentes on a

$$\{0\}^\perp = E$$

On a aussi :

$$E^\perp = \{0\}$$

Proposition 11.

Soient $(E, \langle, \rangle)$ un espace préhilbertien réel et A et B deux parties de E .

1. $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .
2. Si $A = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, alors

$$x \in A^\perp \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle x, x_i \rangle = 0$$

3. Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.
4. $A \subset (A^\perp)^\perp$.

Démonstration : Soient $(E, \langle, \rangle)$ un espace préhilbertien réel et A et B deux parties de E .

1. L'ensemble $A^\perp$ est non vide car $0 \in A^\perp$. Il est stable par combinaisons linéaires en effet si $x, y \in (A^\perp)^2$ et si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, alors pour $a \in A$ on a :

$$\langle a, \lambda x + \mu y \rangle = \lambda \langle a, x \rangle + \mu \langle a, y \rangle = 0$$

2. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ supposons que $A = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

Procédons par double inclusion.

Si $x \in A^\perp$ alors comme pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i \in A$ on a bien $\langle x, x_i \rangle = 0$.

Soit $x \in E$, supposons que pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\langle x, x_i \rangle = 0$. Soit $a \in A$, par définition de A il existe un n -uplet $(\lambda_i) \in \mathbb{R}^n$ tel que $a = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ d'où

$$\langle a, x \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x_i, x \rangle = 0$$

Ainsi $x \in A^\perp$.

3. Soit $b \in B^\perp$, alors pour tout $a \in A$, on a :

$$\langle b, a \rangle = 0, \quad \text{car } a \in A \subset B$$

Ainsi $b \in A^\perp$ et donc $B^\perp \subset A^\perp$.

4. Soit $a \in A$ et $b \in A^\perp$ par définition

$$\langle a, b \rangle = 0$$

donc $a \in (A^\perp)^\perp$ on en déduit que $A \subset (A^\perp)^\perp$. ■

Remarques. Attention !

Si F est une partie de E on a en général par $(F^\perp)^\perp = F$. C'est très clair si F n'est pas un sev de E puisque $(F^\perp)^\perp$ lui l'ai !

Exemple 3

Soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique et $X = \text{Vect}(1, 1)$. Déterminer $X^\perp$.

2.2 Familles orthogonales, familles orthonormales

Définition 12.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien rel.

- On dit qu'une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E est orthogonale si :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}, \quad 1 \leq i < j \leq n \Rightarrow \langle x_i, x_j \rangle = 0$$

— Une famille orthogonale de vecteurs $(x_1, \dots, x_n)$ de E est orthonormale si de plus

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \|x_i\| = 1$$

Remarque.

Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E est orthonormale si et seulement si

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad \langle x_i, x_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Exemple 4

- Montrer que, pour le produit scalaire canonique, la base canonique est orthonormale.
- Pour le produit scalaire défini dans l'exemple 1 – 2 sur $\mathbb{R}^2$, montrer que la base canonique n'est pas orthonormale, mais que la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2)\right)$ l'est.

Exemple 5

On considère $E = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \text{ } 2\pi\text{-périodique}\}$.

- Montrer que l'application

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t) \, dt$$

définit un produit scalaire sur E .

- Montrer que la famille $(f_k : t \mapsto \cos(kt))_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est une famille orthogonale pour ce produit scalaire.

Proposition 13 (Pythagore).

Pour toute famille orthogonale $(x_1, \dots, x_n)$ de E on a :

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

Si de plus la famille est orthonormale :

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = n$$

Démonstration : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonale de $(E, \langle, \rangle)$ un espace préhilbertien réel. Les propriétés du produit scalaire et de l'orthogonalité donne

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2$$

Remarque.

La réciproque est vraie lorsque $n = 2$ mais elle est fausse en général lorsque $k \geq 3$.

Proposition 14.

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

En particulier une famille orthonormale est libre.

Démonstration : Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille orthogonale de E .

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0$$

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ en calculant $\langle 0, x_j \rangle$ on obtient :

$$\left\langle x_j, \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \langle x_j, x_i \rangle = 0$$

Mais comme la famille est orthogonale le seul terme non nul de la dernière somme est $\lambda_j \|x_j\|^2$. Or x_j est non nul donc $\|x_j\| \neq 0$. On en déduit que $\lambda_j = 0$.

La famille est donc libre. ■

2.3 Othonormalisation de Gram-Schmidt

Proposition 15.

Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace préhilbertien.

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de vecteurs de E alors il existe une unique famille orthonormale telle que :

- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$
- $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle e_k, x_k \rangle > 0$.

Démonstration : Démontrons ce résultat par récurrence sur le nombre de vecteurs de la famille. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ notons $\mathcal{P}(k)$ l'assertion : pour toute famille libre $(x_1, \dots, x_k)$ de E il existe une unique famille orthonormée vérifiant :

- $\forall l \in \llbracket 1, k \rrbracket, \text{Vect}(e_1, \dots, e_l) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$
- $\forall l \in \llbracket 1, k \rrbracket, \langle e_l, x_l \rangle > 0$.

- Soit (e_1) une famille libre de E (ie un vecteur non nul). On procédons par analyse synthèse. On cherche $e_1 \in E$ qui vérifie les trois conditions suivantes :

- $\text{Vect}(e_1) = \text{Vect}(x_1)$;
- $\|e_1\| = 1$;
- $\langle x, e_1 \rangle > 0$.

La première condition impose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $e_1 = \lambda x_1$. Avec la deuxième on obtient

$$1 = \|e_1\| = \|\lambda\| \|x_1\|$$

Comme de plus $x_1 \neq 0_E$, alors $\|x_1\| \neq 0$ on a alors

$$\lambda = \pm \frac{1}{\|x_1\|}$$

Enfin la dernière condition nous donne

$$\langle e_1, x_1 \rangle > 0 \Rightarrow \lambda \|x_1\|^2 > 0$$

Donc $\lambda > 0$. Ainsi S'il existe un tel vecteur il s'écrit $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$.

On vérifie facilement que le vecteur $e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}$ vérifie les conditions souhaitées.

- Soit $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, supposons que $\mathcal{P}_k$ soit vraie. On cherche à présent e_{k+1} satisfaisant les trois conditions suivantes :
 - $\text{Vect}(e_1, \dots, e_{k+1}) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_{k+1})$;
 - $(e_1, \dots, e_{k+1})$ orthonormale;
 - $\langle x_{k+1}, e_{k+1} \rangle > 0$.

On procède encore par analyse synthèse. Supposons qu'un tel vecteur e_{k+1} existe. Comme, par hypothèse de récurrence, on a $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$, on sait qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_k, \mu) \in \mathbb{R}^{k+1}$ tel que :

$$e_{k+1} = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k e_k + \mu x_{k+1}.$$

Mais la famille $(e_1, \dots, e_k)$ est orthonormale ainsi on a pour tout $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$:

$$\langle e_{k+1}, e_j \rangle = 0 \Rightarrow \lambda_j - \mu \langle e_j, x_{k+1} \rangle = 0.$$

Ainsi on obtient l'expression suivante de e_{k+1} :

$$e_{k+1} = \mu \left(\underbrace{x_{k+1} - \langle e_1, x_{k+1} \rangle e_1 - \dots - \langle e_k, x_{k+1} \rangle e_k}_{v_{k+1}} \right)$$

Le vecteur v_{k+1} est nécessairement non nul car s'il l'était x_{k+1} pourrait s'exprimer en fonction des vecteurs $(e_1, \dots, e_k)$ donc des vecteurs $(x_1, \dots, x_k)$ et la famille $(x_1, \dots, x_{k+1})$ ne serait pas libre.

Comme la famille $(e_1, \dots, e_{k+1})$ est orthonormale. On a alors $\|e_{k+1}\| = 1$, d'où

$$\mu = \pm \frac{1}{\|v_{k+1}\|}$$

Enfin, la dernière condition nous donne :

$$\langle x_{k+1}, e_{k+1} \rangle = \frac{1}{\mu} > 0$$

D'où $\mu = \frac{1}{\|v_{k+1}\|}$. Ainsi on a montré que si un tel vecteur existe alors il s'écrit :

$$e_{k+1} = \frac{x_{k+1} - \langle e_1, x_{k+1} \rangle e_1 - \dots - \langle e_k, x_{k+1} \rangle e_k}{\|x_{k+1} - \langle e_1, x_{k+1} \rangle e_1 - \dots - \langle e_k, x_{k+1} \rangle e_k\|}$$

Réciproquement posons

$$e_{k+1} = \frac{x_{k+1} - \langle e_1, x_{k+1} \rangle e_1 - \dots - \langle e_k, x_{k+1} \rangle e_k}{\|x_{k+1} - \langle e_1, x_{k+1} \rangle e_1 - \dots - \langle e_k, x_{k+1} \rangle e_k\|}$$

On vérifie que ce vecteur satisfait bien les trois conditions demandées.

On conclue par le principe de récurrence. ■

Remarque.

Cette démonstration permet de définir l'algorithme : le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Exemple 6

On considère $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^2 P(k)Q(k)$. Orthonormalisons la base canonique par le procédé de Gram-Schmidt.

- $Q_0 = \frac{1}{\|1\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
- $R_1 = X - \langle Q_0, X \rangle Q_0 = X - 1$, et $Q_1 = \frac{R_1}{\|R_1\|} = \frac{X-1}{\sqrt{2}}$.
- $R_2 = X^2 - \langle Q_0, X^2 \rangle Q_0 - \langle Q_1, X^2 \rangle Q_1 = X^2 - 2X + \frac{1}{3}$.
Et $Q_2 = \frac{R_2}{\|R_2\|} = \sqrt{\frac{3}{2}} \left(X^2 - 2X + \frac{1}{3} \right)$.

3 Bases orthonormées d'un espace euclidien

3.1 Existence de bases orthormées dans un espace euclidien

Définition 16.

Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien. une famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E s'il s'agit d'une famille orthonormée et d'une base de E .

Exemple 7

- La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale pour le produit scalaire usuel.
 - La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{X-1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}} \left(X^2 - 2X + \frac{1}{3} \right) \right)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^2 P(k)Q(k)$.
- Pour ce même produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$, on a la base orthonormée (L_0, L_1, L_2) des polynômes de Lagrange, où pour tout $(i, j)^2 \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$ $L_i(j) = \delta_{i,j}$.

Proposition 17.

Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien. Il existe une base orthonormée de E .

Démonstration : Puisque E est un espace vectoriel de dimension finie, il existe une base $(x_1, \dots, x_n)$ de E . Notons alors l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de cette famille. C'est une famille orthonormale, donc libre de n vecteurs de E . C'est donc une base orthonormée de E . ■

Proposition 18.

Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien. Toute famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormée de E .

Démonstration : Soit $(e_1, \dots, e_k)$ une famille orthonormée de E . C'est en particulier une famille libre de E . On peut donc la compléter en une base $(e_1, \dots, e_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$ de E . On applique alors le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E . On notera que les k premiers vecteurs restent inchangés quand on applique l'algorithme. ■

Exemple 8

Après avoir normalisé le vecteur $x_1 = (3, 0, 4)$, compléter en une base de $\mathbb{R}^3$ muni d'un produit scalaire.

3.2 Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormée

L'intérêt des bases orthonormées résulte des propriétés suivantes.

Proposition 19 (Coordonnées dans une base orthonormée).

Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et $x \in E$. Alors les coordonnées de x dans $(e_1, \dots, e_n)$ sont $(\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle)$. Autrement dit

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k$$

Démonstration : On pose $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$. Alors pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\langle x, e_k \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, e_k \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \langle e_i, e_k \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \delta_{i,k} = x_k. \quad \blacksquare$$

Proposition 20 (Expression du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée).

Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x, y) \in E^2$ de coordonnées respectives $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$ dans une base orthonormale de E . Alors :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2}$$

Démonstration : Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien et $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale. Soient $(x, y) \in E^2$ de coordonnées respectives $(x_1, \dots, x_n)$ et $(y_1, \dots, y_n)$. On a alors :

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Le résultat sur la norme découle alors de la relation $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$. ■

Reparque :

Sous forme matricielle, si X et Y sont les vecteurs colonnes de coordonnées de deux vecteurs x et y dans une base orthonormée. On a alors

$$\langle x, y \rangle = \sqrt{X^T Y}$$

4 Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

4.1 Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace vectoriel

Proposition 21.

Soit $(E, \langle, \rangle)$ un espace euclidien réel et F un sous-espace vectoriel de E . Alors F et $F^\perp$ sont en somme directe.

Démonstration : Comme F est un sous-espace vectoriel de E , on a $0_E \in F \cap F^\perp$. Réciproquement soit $x \in F \cap F^\perp$. Alors par définition $x \in F$ et $x \in F^\perp$ d'où $\langle x, x \rangle = 0$ et donc $x = 0$ par définition du produit scalaire. On a ainsi $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. La somme est donc directe. ■

Proposition 22.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de **dimension finie**. Alors on a

$$E = F \oplus F^\perp.$$

De plus $F^\perp$ est le seul supplémentaire de F dans E qui est orthogonal à F .
On l'appelle le supplémentaire orthogonal de F .

Démonstration : Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Si $F = \{0_E\}$, alors $F^\perp = E$ et le résultat est immédiat.

Supposons que F n'est pas réduit à 0_E , comme il est de dimension finie, il possède une base orthogonale $(f_1, \dots, f_n)$. On sait déjà que ces deux sous-espaces vectoriels sont en somme directe, il reste donc à montrer que $E = F + F^\perp$. L'inclusion $F + F^\perp \subset E$ est immédiate, montrons l'inclusion contraire. Soit $x \in E$, alors

$$x = \left(\sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k \right) + \left(x - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k \right)$$

La somme $\sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k$ est une combinaison linéaire des vecteurs $(f_1, \dots, f_n)$ c'est donc un élément de F . Montrons que $x -$

$\sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k$ appartient à $F^\perp$. Soit $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ on a

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k, f_i \right\rangle = \langle x, f_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle \langle f_k, f_i \rangle = \langle x, f_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle \delta_{k,i} = \langle x, f_i \rangle - \langle x, f_i \rangle = 0$$

Ainsi on a bien

$$E = F \oplus F^\perp$$

Montrons maintenant que $F^\perp$ est l'unique sous-espace vectoriel de E supplémentaire et orthogonal à F .

Considérons un supplémentaire G de F qui est aussi orthogonal à F et montrons que $F^\perp = G$. On procède par double inclusion.

Soit $x \in G$ comme G est orthogonal à F alors pour tout $f \in F$, $\langle x, f \rangle = 0$. Ainsi $G \subset F^\perp$.

Soit $x \in F^\perp$ montrons que c'est un élément de G . Comme F et G sont supplémentaires dans E il existe un couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. Comme $x \in F^\perp$ et $x_F \in F$ on a $\langle x, x_F \rangle = 0$. D'où

$$0 = \langle x, x_F \rangle = \langle x_F + x_G, x_F \rangle = \langle x_F, x_F \rangle + \langle x_G, x_F \rangle$$

Mais G est orthogonal à F d'où

$$\|x_F\|^2 = 0$$

Ainsi $x_F = 0$. Et donc $x = x_G$ c'est donc un élément de G .

On a ainsi

$$F^\perp = G$$

■

Proposition 23.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un **espace euclidien**. Pour tout sous-espace vectoriel F de E on a :

- $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$;
- $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration : Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et F un sous-espace vectoriel de E .

Comme E est de dimension finie, F l'est aussi. D'où d'après la proposition précédente

$$E = F \oplus F^\perp$$

On a ainsi l'égalité sur les dimensions

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp)$$

Par ailleurs on a déjà montré que $F \subset (F^\perp)^\perp$ et d'après l'égalité qu'on vient de démontrer on a :

$$\dim((F^\perp)^\perp) = \dim(E) - \dim(F^\perp) = \dim(E) - (\dim(E) - \dim(F)) = \dim(F)$$

Ainsi on a bien $F = (F^\perp)^\perp$.

■

Remarque :

On rappelle que l'égalité $(F^\perp)^\perp$ n'est, en général, pas vraie en dimension infinie. Voir l'exemple qui suit.

Exemple 9

On considère $E = \{ \text{des suites nulles à partir d'un certain rang} \}$ muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=0}^{+\infty} u_i v_i$$

On pose $F = \left\{ u \in E, \sum_{i=0}^{\infty} u_i = 0 \right\}$.

1. Montrer que $F^\perp = \{0_E\}$.
2. En déduire que F n'est pas un sous-ensemble de $(F^\perp)^\perp$ et que $F \oplus F^\perp \neq E$.

Exemple 10

Dans l'espace euclidien canonique $\mathbb{R}^4$, on s'intéresse au plan vectoriel d'équations $x - y - z - t = 0$ et $2x + y + z - 2t = 0$. Déterminer son supplémentaire orthogonal.

Définition 24.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et H un hyperplan de E . Le sous-espace $H^\perp$ est une droite dont tout vecteur non nul est appelé **vecteur normal à H** .

4.2 Projections orthogonales et propriétés**Définition 25.**

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. On appelle **projection orthogonale** sur F la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Remarque : La définition précédente a un sens parce que F est de dimension finie et donc on a bien $E = F \oplus F^\perp$.

Proposition 26.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $(f_1, \dots, f_n)$ une base orthonormée de F . On note p la projection orthogonale sur F . Alors

$$\forall x \in E, \quad p(x) = \sum_{k=1}^n \langle x, f_k \rangle f_k.$$

Démonstration : Cela vient immédiatement de la démonstration de la proposition 22. ■

Exemple 11

Soit $F = \text{Vect}(\sin, \cos)$, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0, 2\pi], \mathbb{R})$. Déterminer le projeté orthogonal de id sur F pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t) dt$.

Exemple 12

Soient E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et H un hyperplan de E de vecteurs normal a . On note p la projection orthogonale sur H . Soit $x \in E$, déterminer $p(x)$.

4.3 Distance à un sous-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 27.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, A une partie non vide de E et $x \in E$. On appelle **distance de x à A** , notée $d(x, A)$, le réel :

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|$$

Démonstration : L'ensemble $\{\|x - a\|, a \in A\}$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (car $A \neq \emptyset$) et minorée par 0. Par propriété de la borne inférieure, le réel $d(x, A)$ est donc bien défini. ■

Proposition 28.

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie et $x \in E$. Alors la projection orthogonale de x sur F , notée $p(x)$, est l'unique élément de F qui réalise la distance de x à F . En particulier,

$$d(x, F) = \|x - p(x)\|$$

Démonstration : Soit $f \in F$, alors $x - f = (x - p(x)) + (p(x) - f)$. Or $x - p(x) \in \ker(p) = F^\perp$ et $p(x) - f \in \text{Im}(p) = F$ donc d'après le théorème de Pythagore, $\|x - f\|^2 = \|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2$.

On pose $D = \{\|x - f\|, f \in F\}$ alors :

- $\|x - p(x)\| \in D$ puisque $p(x) \in F$.
- Par le calcul précédent,

$$\forall f \in F, \|x - f\| = \sqrt{\|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2} \geq \|x - p(x)\|$$

Ainsi D est minoré par $\|x - p(x)\|$.

On en déduit que $\|x - p(x)\| = \min D$. On a donc bien $\|x - p(x)\| = \inf D = d(x, F)$.

Enfin, pour tout $f \in F \setminus \{p(x)\}$, $\|x - f\| = \sqrt{\|x - p(x)\|^2 + \|p(x) - f\|^2} > \|x - p(x)\|$ car $p(x) - f \neq 0$. La distance n'est donc atteinte qu'en $p(x)$. ■