Lycée Condorcet
PCSI

Juin 2024

Déterminant

Table des matières

1 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base **1**
1.1 Définition . . . 1
1.2 Cas particulier des dimensions 2 et 3 . . . 2
1.3 Propriétés . . . 3

2 Déterminant d'un endomorphisme **4**

3 Déterminant d'une matrice carrée **5**

4 Calcul de déterminant **6**
4.1 Échelonner . . . 6
4.2 Développer selon une colonne ou une ligne. . . . 8

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n désignera un entier de $\mathbb{N}^*$

1 Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

1.1 Définition

Définition 1 (Forme alternée)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et soit f une application de E^n dans $\mathbb{K}$. On dit que f est **alternée** si f est nulle sur toute la famille de vecteurs dont au moins deux sont égaux.

Exemple 1

L'application de E^2 dans $\mathbb{K}$ définie pour tout $x \in E$ par $f(x, y) = x - y$ est alternée

Proposition-Définition 2 (Déterminant dans une base)**.**

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Il existe une unique application $\det_{\mathcal{B}}$ définie de E^n dans $\mathbb{K}$ qui vérifie :

— $\det_{\mathcal{B}}$ est linéaire par rapport à chaque variable,

— $\det_{\mathcal{B}}$ est alternée,

— $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

On l'appelle **déterminant dans la base** $\mathcal{B}$.

La démonstration de l'existence et de l'unicité de cette application est hors programme.

Proposition 3.

Soit $(x_1,\cdots,x_n)\in E^n$ et $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$. Alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots x_n)=-\det_{\mathcal{B}}(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots x_n)$$

C'est à dire intervertir deux vecteurs inverse le signe du déterminant.

Démonstration : Soit $(x_1,\cdots,x_n)\in E^n$ et $(i,j)\in[\![1,n]\!]$, on peut supposer, sans perte de généralité, que $i<j$. Comme $\det_{\mathcal{B}}$ est d'une part alternée et d'autre part linéaire en les deux variables, on a :

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \det_{\mathcal{B}}(x_1,\cdots,x_i+x_j,\cdots,x_i+x_j,\cdots,x_n) \\ & = & \det_{\mathcal{B}}(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_i+x_j,\cdots,x_n)+\det_{\mathcal{B}}(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i+x_j,\cdots,x_n) \\ & = & 0+\det_{\mathcal{B}}(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)+\det_{\mathcal{B}}(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)+0 \end{array}$$

On en déduit l'égalité

$$\boxed{\det_{\mathcal{B}}(x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_j,\cdots,x_n)=-\det_{\mathcal{B}}(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_i,\cdots,x_n)}$$

■

1.2 Cas particulier des dimensions 2 et 3

Dans le chapitre sur les matrices nous avons défini le déterminant d'une matrice 2×2. La proposition suivante est le lien !

Proposition 4.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 2 et $\mathcal{B}$ une de ses bases. Soit $(x,y)\in E^2$ de coordonnées respectives (x_1,x_2) et (y_1,y_2) dans la base $\mathcal{B}$. Alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(x,y)=x_1y_2-x_2y_1$$

Démonstration : On note e_1 et e_2 les vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Les propriétés du déterminant (dans l'ordre linéarité de chaque variable, le caractère alternée et la valeur en $\mathcal{B}$) donnent alors :

$$\begin{array}{rcl} \det_{\mathcal{B}}(x,y) & = & \det_{\mathcal{B}}(x_1e_1+x_2e_2,y_1e_1+y_2e_2) \\ & = & x_1\det_{\mathcal{B}}(e_1,y_1e_1+y_2e_2)+x_2\det_{\mathcal{B}}(e_2,y_1e_1+y_2e_2) \\ & = & x_1y_1\det_{\mathcal{B}}(e_1,e_1)+x_1y_2\det_{\mathcal{B}}(e_1,e_2)+x_2y_1\det_{\mathcal{B}}(e_2,e_1)+x_2y_2\det_{\mathcal{B}}(e_2,e_2) \\ & = & x_1y_2\det_{\mathcal{B}}(e_1,e_2)-x_2y_1\det_{\mathcal{B}}(e_1,e_2) \end{array}$$

On a donc bien

$$\boxed{\det_{\mathcal{B}}(x,y)=x_1y_2-x_2y_1}$$

■

Remarque. On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique.
Alors de la valeur absolue du déterminant de deux vecteurs est l'aire du parallélogramme défini par ces vecteurs.
En effet, l'application qui à deux vecteurs associe l'aire algébrique qu'ils délimitent est linéaire par rapport à chaque variable, alternée et vaut 1 sur la base canonique.
On peut d'ailleurs démontrer géométriquement que si l'angle défini par les deux vecteurs appartient à $[0,\pi]$ alors on retrouve bien la formule ci-dessus !

Proposition 5.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 3 et $\mathcal{B}$ une de ses bases. Soit $(x,y,z)\in E^3$ de coordonnées respectives (x_1,x_2,x_3), (y_1,y_2,y_3) et (z_1,z_2,z_3) dans la base $\mathcal{B}$. Alors :

$$\det_{\mathcal{B}}(x,y,z)=x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2-x_3y_2z_1-x_2y_1z_3-x_1y_3z_2$$

Démonstration : On note e_1, e_2 et e_3 les vecteurs de la base $\mathcal{B}$. Les propriétés du déterminant donnent alors :

$$\begin{array}{rcl} \det_{\mathcal{B}}(x,y,z) & = & x_1 \det_{\mathcal{B}}(e_1,y,z) + x_2 \det_{\mathcal{B}}(e_2,y,z) + x_3 \det_{\mathcal{B}}(e_3,y,z) \\ & = & 0 + x_1y_2 \det_{\mathcal{B}}(e_1,e_2,z) + x_1y_3 \det_{\mathcal{B}}(e_1,e_3,z) \\ & & +x_2y_1 \det_{\mathcal{B}}(e_2,e_1,z) + 0 + x_2y_3 \det_{\mathcal{B}}(e_2,e_3,z) \\ & & +x_3y_1 \det_{\mathcal{B}}(e_3,e_1,z) + x_3y_2 \det_{\mathcal{B}}(e_3,e_2,z) + 0 \\ & = & x_1y_2z_3 \det_{\mathcal{B}}(e_1,e_2,e_3) + x_1y_3z_2 \det_{\mathcal{B}}(e_1,e_3,e_2) \\ & & +x_2y_1z_3 \det_{\mathcal{B}}(e_2,e_1,e_3) + 0 + x_2y_3z_1 \det_{\mathcal{B}}(e_2,e_3,e_1) \\ & & +x_3y_1z_2 \det_{\mathcal{B}}(e_3,e_1,e_2) + x_3y_2z_1 \det_{\mathcal{B}}(e_3,e_2,e_1) + 0 \\ & = & x_1y_2z_3 - x_1y_3z_2 + x_2y_3z_1 - x_2y_1z_3 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 \end{array}$$

En effet $\det_{\mathcal{B}}(e_1,e_2,e_3) = 1$, $\det_{\mathcal{B}}(e_1,e_3,e_2) = -\det_{\mathcal{B}}(e_1,e_2,e_3) = -1$, $\det_{\mathcal{B}}(e_2,e_3,e_1) = -\det_{\mathcal{B}}(e_1,e_3,e_2) = \det(e_1,e_2,e_3) = 1$, etc. ■

Remarque. Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique le déterminant de 3 vecteurs est le volume algébrique qu'ils délimitent.

1.3 Propriétés

Proposition 6.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\mathcal{B}$ une base de E. Soit f une application de E^n dans $\mathbb{K}$, linéaire par rapport à chaque variable et alternée. Alors f est un multiple de $\det_{\mathcal{B}}$.

Démonstration : Montrons que $f = f(\mathcal{B})\det_{\mathcal{B}}$.
Procédons par disjonction de cas :

— Si $f(B) \neq 0$, alors l'application $X \mapsto \frac{f(X)}{f(B)}$ est une application de E^n dans $\mathbb{K}$, linéaire par rapport à chaque variable et qui vaut 1 en B. C'est donc d'après la définition proposition 1 $\det_{\mathcal{B}}$.

— Si $f(B) = 0$, alors si $X = (x_1, \cdots, x_n)$ est un n-uplet d'éléments de E, chaque composante x_i se décompose dans la base $\mathcal{B}$ et en utilisant la linéarité de f selon chaque variable, on peut écrire $f(X)$ comme combinaison linéaire de $f(B)$. Ainsi $f(X) = 0$. L'application f est donc nulle et vérifie donc bien $f = f(B)\det_{\mathcal{B}}$, ce qui montre le résultat annoncé. ■

Proposition 7.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors :

$$\forall X = (x_1, \cdots, x_n) \in E^n, \quad \det_{\mathcal{B}'}(X) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(X)$$

Démonstration : L'application $\det_{\mathcal{B}'}$ est une application de E^n dans $\mathbb{K}$, linéaire par rapport à chaque variable et alternée. Donc d'après ce qui précède on a

$$\forall X \in E^n, \quad \det_{\mathcal{B}'}(X) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(X).$$

■

Proposition 8.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{B}$ une base de E et $X \in E^n$ une famille de n vecteurs de E. Alors :

$$X \text{ est une base de } E \iff \det_{\mathcal{B}}(X) \neq 0$$

Démonstration : — On suppose que X est une base de E. Alors $1 = \det_X(X) = \det_X(B)\det_B(X)$ donc $\det_B(X) \neq 0$.

— Montrons la contraposée de la réciproque.
Supposons que $X = (x_1, \cdots, x_n)$ n'est pas une base de E. Comme $\dim E = n = \mathrm{Card}(X)$ la famille X est liée. Quitte à renuméroter et permuter les vecteurs (ce qui ne change que le signe du déterminant), on peut supposer que x_n s'écrit comme combinaisons linéaires des vecteurs $x_1, \cdots, x_{n-1}$. Ainsi il existe $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-1}$ tel que

$$x_n = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k$$

En utilisant la linéarité par rapport à la dernière composante et le caractère alternée on obtinet alors :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}}(X) &= \det_{\mathcal{B}}\left(x_1, \cdots, x_{n-1}, \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k x_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \det_{\mathcal{B}}(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k 0 \end{aligned}$$

On a donc bien $\det_{\mathcal{B}}(X) = 0$

On a donc bien

$$\boxed{X \text{ est une base } \iff \det_{\mathcal{B}} \neq 0}$$

■

Exemple 2

Considérons les vecteurs $u = (1, 2, 0)$, $v = (1, 0, 1)$ et $w = (1, 1, 4)$. Utiliser ce qui précède pour montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$.

2 Déterminant d'un endomorphisme

Proposition-Définition 9.

Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{B}$ une base de E et $f \in \mathcal{L}(E)$. La valeur $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie. On l'appelle **déterminant de** f et on la note $\det(f)$.

Démonstration : Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E, montrons que $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}'))$.
Comme f est une application linéaire, l'application qui à $X \in E^n$ associe $\det_{\mathcal{B}}(f(X))$ est linéaire par rapport à chaque variable et alternée, donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\forall X \in E^n$, $\det_{\mathcal{B}}(f(X)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(X)$. En particulier pour $X = \mathcal{B}$, on trouve

$$\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \lambda.$$

Donc :

$$\forall X \in E^n, \quad \det_{\mathcal{B}}(f(X)) = \det_{\mathcal{B}} f(\mathcal{B})) \det_{\mathcal{B}}(X).$$

Le cas particulier $X = \mathcal{B}'$ donne donc :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}')) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \ .(*)$$

Par ailleurs, d'après la proposition 7, on a $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}$. En appliquant en $f(\mathcal{B}')$ on obtient,

$$\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}')) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}')) \ \ (**)$$

Les deux relations $(*)$ et $(**)$ mises bout à bout donnent : $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}'))$, ce qui, en divisant par $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$ montre bien

$$\boxed{\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}'}(f(\mathcal{B}'))}$$

■

Attention ! Le déterminant n'existe que pour un endomorphisme (pas pour n'importe qu'elle application linéaire).

Exemple 3

En notant $\mathcal{B}$ une base de E, on trouve $\det(id_E) = \det_{\mathcal{B}}(id_E(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Proposition 10.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Alors :

$$\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)$$

Démonstration : Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $\det(f \circ g) = \det_{\mathcal{B}}(f \circ g(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}}(f(g(\mathcal{B})))$. On montre comme dans la démonstration précédente que :

$$\forall X \in E^n, \quad \det_{\mathcal{B}} f(\mathcal{B})) \det_{\mathcal{B}}(X)$$

On en déduit :

$$\det(f \circ g) = \det_{\mathcal{B}}(f(g(\mathcal{B}))) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \det_{\mathcal{B}}(g(\mathcal{B}))$$

On a donc bien

$$\boxed{\det(f \circ g) = \det(f) \det(g)}$$

■

Proposition 11.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors f est un automorphisme de E si et seulement si $\det(f) \neq 0$. Dans ce cas, on a aussi $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

Démonstration : Notons $\mathcal{B}$ une base de E.
On a vu au chapitre précédent que f est un automorphisme si et seulement si f est de rang n c'est à dire $f(\mathcal{B})$ est une base de E. Or le déterminant d'une base est toujours non nul. Ainsi

$$\boxed{f \text{ est un automorphisme } \iff \det(f) \neq 0}$$

Supposons maintenant que f est un automorphisme. On a alors $f \circ f^{-1} = id_E$, donc :

$$\det(f)\det(f^{-1}) = \det(f \circ f^{-1}) = \det(id_E) = id_E$$

On a donc bien

$$\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}.$$

■

3 Déterminant d'une matrice carrée

Définition 12.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A le déterminant de la famille des colonnes de A dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, que l'on note

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Remarque. Attention ! Le déterminant n'est défini que pour des matrices **carrées**.

Exemple 4

Soit $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Alors $\det(I_n) = \det_{\mathcal{B}_n}(\mathcal{B}_n) = 1$.

Remarque. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. La définition du déterminant d'un endomorphisme donne alors directement $\det(f) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$ et ce peu importe la base de E !

Proposition 13.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par $A \mapsto \det(A)$ est n-linéaire et alternée par rapport aux colonnes de A.
En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Démonstration : On note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Les propriétés de l'application étudiée découlent directement de celle de $\det_{\mathcal{B}_n}$. De plus, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si on note $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes de A,

$$\det(\lambda A) = \det_{\mathcal{B}_n}(\lambda C_1, \cdots, \lambda C_n) = \lambda^n \det(A).$$

■

Remarque. Attention, cela ne signifie pas que le déterminant est linéaire : dans le cas génral, si $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\det(\lambda A + B) \neq \lambda \det(A) + \det(B)$$

Proposition 14.

Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration : Soient f_A et f_B les endomorphismes canoniquement associés à A et B. Alors par propriétés du déterminant et des matrices d'endomorphismes,

$$\det(A)\det(B) = \det(f_A)\det(f_B) = \det(f_A \circ f_B) = \det(AB)$$

■

Proposition 15.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans le cas inversible, on a de plus $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Démonstration : Soit f_A l'endomorphisme canoniquement associé à A. Alors :

$$A \text{ est inversible } \iff f_A \text{ est bijectif } \iff \det(f_A) \neq 0 \iff \det(A) \neq 0$$

Et dans le cas inversible, $\det(A^{-1}) = \det(f_A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f_A)} = \dfrac{1}{\det(A)}$. ■

Remarque. On déduit de tout cela que deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ont le même déterminant. En effet si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in GL_n(\mathbb{K})$, alors

$$\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$$

Proposition 16.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A^T) = \det(A)$.

La démonstration n'est pas au programme.

4 Calcul de déterminant

4.1 Échelonner

Proposition 17 (Effet des opérations élémentaires sur le déterminant)**.**

Soient $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

- Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ et $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ ne modifient pas les déterminant.
- Les opérations élémentaires $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $C_i \leftarrow \lambda C_i$ multiplient le déterminant par λ.
- Les opérations élémentaires $L_i \leftrightarrow L_j$ et $C_i \leftrightarrow C_j$ multiplient le déterminant par -1.

Démonstration : Il sulffit de le montrer sur les colonnes puisque le déterminant est invariant par tranposition.
Les résultats s'obtiennent directement par les propriétés de linéarité par rapport à chaque variable, le caractère alterné et l'antisymétrie. ■

Proposition 18 (Déterminant d'une matrice triangulaire).

Soit $T=(t_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ une matrice triangulaire. Alors :

$$\det(T)=\prod_{i=1}^{n} t_{i,i}.$$

Démonstration : Traitons le cas où T est triangulaire supérieure (on peut s'y ramener en considérant la transposée de la mattrice). En utilisant successivement la linéarité du déterminant sur la première colonne et les opérations élémentaires $C_i \leftarrow C_i t_{1,i} C_1$, on trouve :

$$\det(T)=\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{vmatrix} = t_{11}\begin{vmatrix} 1 & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{vmatrix} = t_{11}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{vmatrix}$$

On réitère le même procédé pour chaque ligne on obtient alors :

$$\det(T)=\prod_{i=1}^{n} t_{ii}\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} t_{ii}$$

■

Remarque. Les deux propositions précédentes permettent d'avoir une méthode générale de calcul de déterminant d'une matrice. On effectue donc des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de la matrice, jusqu'à se ramener au déterminant d'une patrice triangulaire.

Exemple 5

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 8 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Exemple 6

Soit $a\in\mathbb{C}$. Calculer le déterminant :

$$\begin{vmatrix} a & 1 & & (1) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (1) & & 1 & a \end{vmatrix}$$

Indication : la somme des éléments de chaque colonne (ou de chaque ligne) est toujours la même. Tirer parti de cette remarque pour faire apparaître une colonne de 1.

4.2 Développer selon une colonne ou une ligne.

Définition 19 (Mineur).

Soit $A)(a_{kl})_{1\leq k,l\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Le **mineur** de position (i,j) de A, notée $\Delta_{i,j}$ dans la suite, est le déterminant de la matrice $(a_{k,l})_{\substack{k\neq i\\ l\neq j}}$ obtenue en ôtant à A sa $i$ème ligne et sa $j$ième colonne.

Exemple 7

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ Son mineur de position $(1,3)$ est :$\Delta_{1,3} =$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 6 & 6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ Son mineur de position $(2,3)$ est :$\Delta_{1,3} =$

Proposition 20.

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, en utilisant la notation $\Delta_{i,j}$ pour le mineur de position (i,j) de A, on a les développements suivants :

Développement selon la $i$ème ligne	Développement selon la $j$ième colonne
$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\Delta_{i,j}$	$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j}\Delta_{i,j}$

La démonstration n'est pas exigible.

Exemple 8

Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

Exemple 9

Soit x un réel. On note $D(x) = \begin{vmatrix} (1+x)^2 & (2+x)^2 & (3+x)^2 & (4+x)^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$

1. Justifier $D : x \mapsto D(x)$ est une fonction polynomiale de degré au plus 2.
2. Exhiber trois racines distinctes pour D et en déduire la valeur de $D(x)$ pour tout x.

Exemple 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a et b deux nombres complexes. Soit la matrice "bidiagonale"

$$\begin{pmatrix} a & & & b \\ & \ddots & \iddots & \\ & \iddots & \ddots & \\ b & & & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C}).$$

Pour $n \geq 1$, on note D_n son déterminant. Le calculer en fonction de n, a et b en établssant d'abord une relation de récurrence sur la suite D_n.