Séries de Bertrand

Dans ce problème, on s'intéresse aux séries, dites de Bertrand, de la forme

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Le but est d'établir la nature d'une telle série, en discutant selon les valeurs de α et β.

1. Supposons $\underline{\alpha < 0}$. Quelle est alors la nature de la série ?
   On supposera dorénavant $\alpha \geq 0$.

2. Supposons $\underline{\alpha > 1}$.
   (a) On note $\alpha' = \frac{1+\alpha}{2}$. Représenter 1, α et α' sur la droite réelle.
   (b) Montrer que pour toute valeur de β,
   $$\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = o\left(\frac{1}{n^{\alpha'}}\right).$$
   (c) Conclure sur la nature de la série de Bertrand.

3. Supposons $\underline{\alpha < 1}$.
   (a) On note $\alpha' = \frac{1+\alpha}{2}$. Représenter 1, α et α' sur la droite réelle.
   (b) Justifier que l'égalité
   $$\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \geq \frac{1}{n^{\alpha'}},$$
   est vraie à partir d'un certain rang.
   (c) Conclure sur la nature de la série de Bertrand.

4. Supposons $\underline{\alpha = 1}$.
   (a) Supposons $\beta \leq 0$. Établir la nature de la série de Bertrand, à l'aide d'une comparaison.
   On supposera dorénavant $\beta > 0$.
   (b) Justifier que $f_\beta : t \mapsto t^{-1}\ln(t)^{-\beta}$ est décroissante sur $[1, +\infty[$.
   (c) À l'aide d'une comparaison série/intégrale, établir :
   $$\forall n \geq 3 \qquad \int_3^{n+1} \frac{1}{t\ln^\beta(t)}\mathrm{d}t \leq \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k\ln(k)^\beta} \leq \int_2^n \frac{1}{t\ln^\beta(t)}\mathrm{d}t \qquad (comp).$$
   - Supposons $\underline{\beta > 1}$. En calculant l'une des deux intégrales dans (*comp*), conclure sur la nature de la série.
   - Supposons $\underline{\beta = 1}$. En calculant l'une des deux intégrales dans (*comp*), conclure sur la nature de la série
   $$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n\ln(n)}$$
   (elle va se révéler être un cas critique).
   - Supposons $\underline{\beta < 1}$. À l'aide du cas précédent, conclure sur la nature de la série.

5. Proposer un théorème récapitulatif sur la convergence des séries de Bertrand.

Corrigé

1. Si $\alpha < 0$, on a, par croissances comparées :
   $$\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = \frac{n^{|\alpha|}}{\ln(n)^\beta} \to +\infty.$$
   La série diverge alors grossièrement.

2. Supposons $\underline{\alpha > 1}$.
   (a) α' est la moyenne de α et de 1. On a dans ce cas $1 < \alpha' < \alpha$.
   (b) Soit β un réel quelconque. On a $\frac{n^{\alpha'}}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = \frac{1}{n^{\alpha-\alpha'} \ln^\beta(n)} \longrightarrow 0$,
   car $\alpha - \alpha' > 0$, (on utilise les croissances comparées si $\beta < 0$).
   (c) La série $\sum \frac{1}{n^{\alpha'}}$ est une série de Riemann convergente car $\alpha' > 1$. Par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ est dans ce cas une série convergente.
3. Supposons $\underline{\alpha < 1}$.
   (a) Dans ce cas-ci on a $\alpha < \alpha' < 1$.
   (b) En utilisant à nouveau les croissances comparées, on a

$$\frac{n^{\alpha'}}{n^\alpha \ln(n)^\beta} = \frac{n^{\alpha-\alpha'}}{\ln(n)^\beta} \longrightarrow +\infty.$$

   À partir d'un certain rang, ce quotient reste donc supérieur à 1, ce qu'il fallait démontrer.
   (c) La série $\sum \frac{1}{n^{\alpha'}}$ est une série de Riemann divergente car $\alpha' \leq 1$. Par comparaison des séries à termes positifs, on a que $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta}$ est dans ce cas une série convergente (remarque : la positivité n'est pas essentielle ici, comme elle l'est dans le cas convergent).
4. Supposons $\underline{\alpha = 1}$.
   (a) Supposons $\beta \leq 0$. On peut alors tout simplement faire la comparaison $\frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \geq \frac{1}{n}$ ce qui permet, en s'appuyant sur la divergence de la série harmonique, de montrer que l'on a divergence dans ce cas.
   On supposera dorénavant $\beta > 0$.
   (b) On pourrait dériver... mais cette fonction est clairement décroissante sur $]1, +\infty[$ comme inverse d'une fonction croissante.
   (c) Lorsqu'on écrit la comparaison série/intégrale, il faut encadrer f_β sur $[k, k+1]$ avec $k \geq 2$ afin d'éviter 1, point auquel f_β n'est pas continue. On obtient :

$$\forall n \geq 3 \qquad \int_3^{n+1} \frac{1}{t \ln^\beta(t)} \mathrm{d}t \leq \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k \ln(k)^\beta} \leq \int_2^n \frac{1}{t \ln^\beta(t)} \mathrm{d}t.$$

   - Supposons $\underline{\beta > 1}$. On va montrer la convergence de la somme partielle en **majorant**. L'intégrale de droite vaut

$$\left[\frac{1}{1-\beta} \ln\left(\ln(t)\right)^{1-\beta}\right]_2^n = \frac{1}{\beta - 1}\left(\ln(\ln(2)) - \ln(\ln(n))^{1-\beta}\right).$$

     Pour $n \geq 3$, on a $\ln(\ln(n))^{1-\beta} \geq 0$, d'où

$$\forall n \geq 3 \qquad \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k \ln(k)^\beta} \leq \frac{1}{\beta - 1} \ln(\ln(2)).$$

     La somme partielle, croissante et majorée, converge dans ce cas.

   - Supposons $\underline{\beta = 1}$. On va montrer la divergence de la somme partielle en **minorant**. L'intégrale de gauche vaut $[\ln\left(\ln(t)\right)]_3^{n+1}$. On a donc

$$\forall n \geq 3 \qquad \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k \ln(k)} \geq \ln(\ln(n)).$$

     En passant à la limite, on obtient par comparaison la divergence de la série $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$.
   - Supposons $\underline{\beta < 1}$. Si $n \geq 3$, $0 < \ln(n) \leq 1$, d'où $\ln(n) \leq \ln(n)^\beta$. On a donc

$$\forall n \geq 3 \qquad \frac{1}{n \ln(n)^\beta} \geq \frac{1}{n \ln(n)}.$$

     On vient de montrer que la série $\sum \frac{1}{n \ln(n)}$ est divergente. Par comparaison des séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum \frac{1}{n \ln(n)^\beta}$ diverge.

5. Théorème :

$$\boxed{\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln(n)^\beta} \text{ converge } \quad \textit{ssi} \quad \alpha > 1 \text{ ou } (\alpha = 1 \text{ et } \beta > 1).}$$