Une famille de polynômes orthogonaux

Dans ce problème, nous allons nous intéresser à la famille des polynômes de Legendre, orthogonale pour un certain produit scalaire. En partie I, nous travaillons avec les trois premiers polynômes de cette famille, afin de réserver la technicité à la partie II.

Nous noterons E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ et pour tout entier n, nous noterons E_n l'ensemble des polynômes de degré au plus n.

Préliminaire. Un produit scalaire.

Pour P et Q deux polynômes, on note $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
Démontrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.

Dans la suite, nous noterons $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.
Pour $n \in \mathbb{N}$, la restriction de ce produit scalaire à E_n^2 définit un produit scalaire, ce qu'on ne demande pas de vérifier.

Partie I. Projection orthogonale sur E_0, E_1, E_2.

Soient les trois polynômes $L_0 = 1,\ L_1 = X,\ L_2 = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}$.

1. Calculer les normes des ces trois polynômes.
2. Montrer que (L_0, L_1, L_2) est une famille orthogonale.
3. À l'aide de ce qui précède, donner une base orthonormée pour chacun des espaces vectoriels E_0, E_1 et E_2.
4. Pour $r \in \{0, 1, 2\}$, notons $p_r \in \mathscr{L}(E)$ le projecteur orthogonal sur E_r.
   On s'intéresse plus particulièrement au vecteur X^3.
   (a) Déterminer $p_0(X^3)$, $p_1(X^3)$, $p_2(X^3)$.
   (b) Pour $k \in \{0, 1, 2\}$, calculer $d(X^3, E_k)$, la distance du vecteur X^3 au sous-espace vectoriel E_k.

Partie II. Polynômes de Legendre et projection orthogonale sur E_n

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme L_n par

$$L_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 (X-1)^{n-k}(X+1)^k.$$

Dans ce qui suit, n est un entier naturel.

1. Démontrer que la définition de L_0, L_1, L_2 est cohérente avec la partie I.
2. Déterminer le degré de L_n, et exprimer le coefficient dominant de L_n sous la forme d'une somme.
3. Vérifier, à l'aide de la formule de Leibniz, que

$$L_n(X) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}\left[(X^2-1)^n\right].$$

4. En déduire explicitement le coefficient dominant de L_n, puis l'identité

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

5. (a) Donner les racines de $(X^2-1)^n$ et leur multiplicité.
   (b) Soit $Q \in E$. Établir par récurrence sur k que

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad \langle Q, L_n\rangle = \frac{(-1)^k}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}[Q(x)]\,\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\left[(x^2-1)^n\right]\mathrm{d}x.$$

   (c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, L_n est orthogonal à E_{n-1} puis justifier que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est orthogonale.
6. (a) En utilisant 10.b), exprimer $\|L_n\|^2$ en fonction de

$$I_n = \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n\mathrm{d}x.$$

(b) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+1} = -\frac{2n+2}{2n+3} I_n.$$

(c) En déduire, pour tout n une expression de I_n faisant intervenir des factorielles.

(d) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

7. (a) Donner une base orthonormée de E_n.
   (b) Soit $p_n \in \mathscr{L}(E)$ le projecteur orthogonal sur E_n.
   Exprimer $p_n(P)$, pour $P \in E$.
   (c) Pour P un polynôme de E, exprimer $d(P, E_n)$, distance de P à E_n (n'ayez pas peur d'écrire une grosse formule moche).

Corrigé

Préliminaire. Un produit scalaire.

• L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est symétrique : pour P et Q dans E, on a

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} Q(t)P(t)\mathrm{d}t = \langle Q, P \rangle.$$

• Pour P, Q_1, Q_2 dans E et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\langle P, \lambda Q_1 + \mu Q_2 \rangle &= \int_{-1}^{1} P(t)\left(\lambda Q_1(t) + \mu Q_2(t)\right)\mathrm{d}t \\
&= \lambda \int_{-1}^{1} P(t)Q_1(t)\mathrm{d}t + \mu \int_{-1}^{1} P(t)Q_2(t)\mathrm{d}t \\
&= \lambda \langle P, \lambda Q_1 \rangle + \mu \langle P, \lambda Q_2 \rangle.
\end{aligned}$$

Ceci démontre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est linéaire à droite, donc à gauche par symétrie.
• Soit $P \in E$. On a $\langle P, P \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)^2 \mathrm{d}t$ qui est un nombre positif puisque c'est l'intégrale d'une fonction continue, positive (avec $-1 \leq 1$).
• Supposons que $\langle P, P \rangle = 0$. On a alors $\int_{-1}^{1} P(t)^2 \mathrm{d}t$: intégrale nulle d'une fonction continue et de signe constant. Par stricte positivité de l'intégrale, on a $\forall t \in [-1, 1]\ P(t) = 0$. Le polynôme P est donc le polynôme nul puisqu'il a une infinité de racines : l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est définie.

Partie I. Projection orthogonale sur E_0, E_1, E_2.

1. Pour $P \in E$, on a par définition $\|P\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} P(t)^2 \mathrm{d}t}$. Les calculs amènent

$$\|L_0\| = \sqrt{2}, \quad \|L_1\| = \sqrt{\frac{2}{3}}, \quad \|L_2\| = \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

2. On a

$$\langle L_0, L_1 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot t\mathrm{d}t, \qquad \text{et} \qquad \langle L_1, L_2 \rangle = \int_{-1}^{1} t\left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t.$$

Ces deux produits scalaires sont nuls car on intègre ici une fonction impaire sur un segment symétrique en 0. D'autre part,

$$\langle L_0, L_2 \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot \left(\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}(x^3 - x)\right]_{-1}^{1} = 0.$$

Les polynômes L_0, L_1 et L_2 sont bien deux à deux orthogonaux.

3. L'espace E_0 est la droite des polynômes constants. Le polynôme $\frac{L_0}{\|L_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ est de norme 1 et constant : c'est clairement une base orthonormée de E_0.
L'espace E_1 est le plan $\mathrm{Vect}(1, X)$. On a prouvé que (L_0, L_1) est orthogonale donc $(\frac{L_0}{\|L_0\|}, \frac{L_1}{\|L_1\|})$ est une famille orthonormée. Il s'agit bien d'une base du plan E_1 puisque cette famille est une famille libre de deux vecteurs de ce plan.
Par des arguments analogues, on se convainc que $(\frac{L_0}{\|L_0\|}, \frac{L_1}{\|L_1\|}, \frac{L_2}{\|L_2\|})$ est une base orthonormée de E_2.

4. (a) On va utiliser les bases orthonormées précédentes pour écrire ces projetés orthogonaux.
- Sur E_0 :

$$p_0(X^3) = \langle X^3, \frac{L_0}{\|L_0\|}\rangle \frac{L_0}{\|L_0\|} = \frac{\langle X^3, L_0\rangle}{\|L_0\|^2} L_0.$$

Or, $\langle X^3, L_0\rangle = \int_{-1}^{1} t^3 \cdot 1\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}t^4\right]_{-1}^{1} = 0$. Ainsi $p_0(X^3) = 0_E$.
- Sur E_1 :

$$\begin{aligned} p_1(X^3) &= \underbrace{\langle X^3, \frac{L_0}{\|L_0\|}\rangle}_{=0} \frac{L_0}{\|L_0\|} + \langle X^3, \frac{L_1}{\|L_1\|}\rangle \frac{L_1}{\|L_1\|} \\ &= \frac{\langle X^3, L_1\rangle}{\|L_1\|^2} L_1 \end{aligned}$$

Or,

$$\langle X^3, L_1\rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot x\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5},$$

d'où

$$p_1(X^3) = \frac{2/5}{2/3} X = \frac{3}{5} X.$$

- Sur E_2 : De même,

$$p_2(X^3) = \sum_{k=0}^{2} \frac{\langle X^3, L_k\rangle}{\|L_k\|^2}$$

Or, on a vu que $\langle X^3, L_0\rangle = 0$. On a aussi

$$\langle X^3, L_2\rangle = \int_{-1}^{1} t^3 (\frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{2})\mathrm{d}t = 0$$

(intégrale d'une fonction impaire sur un segment symétrique par rapport à 1). Ainsi,

$$p_2(X^3) = \frac{\langle X^3, L_1\rangle}{\|L_1\|^2} L_1 = p_1(X^3) = \frac{3}{5} X.$$

(b) D'après le cours, le vecteur de E_k le plus "proche" de X^3 est le projeté orthogonal de X^3 sur E_k. Autrement dit,

$$d(X^3, E_0)^2 = \|X^3 - p_0(X^3)\|^2 = \int_{-1}^{1} (t^3 - 0)^3 \mathrm{d}t = \left[\frac{1}{7}t^7\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{7},$$

d'où $\boxed{d(X^3, E_0) = \sqrt{\frac{2}{7}}}$.
De même,

$$\begin{aligned} d(X^3, E_1)^2 = \|X^3 - p_1(X^3)\|^2 &= \int_{-1}^{1} \left(t^3 - \frac{3}{5}t\right)^2 \mathrm{d}t \\ &= \int_{-1}^{1} \left(t^6 - \frac{6}{5}t^4 + \frac{9}{25}t^2\right) \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{7}t^7 - \frac{6}{25}t^5 + \frac{3}{25}t^3\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{8}{7 \cdot 25}. \end{aligned}$$

d'où $\boxed{d(X^3, E_1) = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{\frac{2}{7}}}$.
Puisque $p_2(X^3) = p_1(X^3)$, on a

$$\boxed{d(X^3, E_2) = d(X^3, E_1) = \sqrt{\frac{2}{7}}}.$$

Partie II. Polynômes de Legendre et projection orthogonale sur E_n

1. Cela se vérifie simplement.

2. Soit $k \in [\![0,n]\!]$. Le polynôme $(X-1)^{n-k}(X+1)^k$ est un polynôme de degré n, unitaire. Notons Q_n le polynôme de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $(X-1)^{n-k}(X+1)^k = X^n + Q_{k,n}$. On a alors

$$L_n = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\right)X^n + \underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 Q_{k,n}}_{\in\mathbb{R}_{n-1}[X]}.$$

Ainsi, L_n est de degré n et son coefficient dominant, somme de carrés strictement positifs, vaut

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

3. D'après la formule de Leibniz,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}\left[(X^2-1)^n\right] &= \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}\left[(X-1)^n(X-1)^n\right]\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}X^{n-k}}\left((X-1)^n\right)\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}X^k}\left((X+1)^n\right)\end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$;

$$\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}X^k}\left((X+1)^n\right) = \frac{n!}{(n-k)!}(X+1)^{n-k} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}X^{n-k}}\left((X-1)^n\right) = \frac{n!}{k!}(X+1)^k.$$

En injectant dans la somme qui précède, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}X^n}\left[(X^2-1)^n\right] = n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{n!}{k!(n-k)!}(X+1)^k = n!2^nL_n,$$

ce qui donne l'identité demandée.

4. Le polynôme $(X^2-1)^n$ est un polynôme unitaire de degré $2n$. Dérivons-le n fois : on obtient un polynôme de degré n et de coefficient dominant

$$(2n)(2n-1)\cdots(n+1) = \frac{(2n)!}{n!}.$$

Divisons par $2^n n!$ pour obtenir le coefficient dominant de L_n. On obtient alors

$$\frac{1}{2^n}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}.$$

En égalant les deux expressions obtenues pour le coefficient dominant de L_n, on établit bel et bien l'identité

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.}$$

5. (a) Clair : $(X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$ donc on a deux racines : 1 et -1 toutes deux de multiplicité n.

 (b) Initialisation :

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^0}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}x^0}\left[Q(x)\right]\frac{\mathrm{d}^{n-0}}{\mathrm{d}x^{n-0}}\left[(x^2-1)^n\right]\mathrm{d}x &= \frac{1}{2^n n!}\int_{-1}^{1}Q(x)2^n n! L_n(x)\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{1}Q(x)L_n(x)\mathrm{d}x\\ &= \langle Q, L_n\rangle.\end{aligned}$$

 Pour prouver l'hérédité, considérons $k \in [\![0,n-1]\!]$ et supposons $\mathcal{P}(n)$. On a alors

$$\langle Q, L_n\rangle = \frac{(-1)^k}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[Q(x)\right]\frac{\mathrm{d}^{n-k}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\left[(x^2-1)^n\right]\mathrm{d}x.$$

 Les fonctions $\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[Q(x)\right]$ et $\frac{\mathrm{d}^{n-k-1}}{\mathrm{d}x^{n-k}}\left[(x^2-1)^n\right]$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ (elles sont polynomiales), on peut réaliser une intégration par parties et obtenir

$$\begin{aligned}\langle Q, L_n\rangle = &\left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[Q(x)\right]\frac{\mathrm{d}^{n-k-1}}{\mathrm{d}x^{n-k-1}}\left[(x^2-1)^n\right]\right]_{-1}^{1}\\ &- \frac{(-1)^k}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}}\left[Q(x)\right]\frac{\mathrm{d}^{n-k-1}}{\mathrm{d}x^{n-k-1}}\left[(x^2-1)^n\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Le crochet est nul : comme l'énoncé nous l'a fait remarquer, -1 et 1 sont des racines de $(X^2-1)^n$ de multiplicité n. Or, puisque $k \geq 0$, on a $n-k-1 \leq n-1$. On sait alors que 1 et -1 sont encore racines de la dérivée $\frac{\mathrm{d}^{n-k-1}}{\mathrm{d}x^{n-k-1}}[(X^2-1)^n]$. On a donc bien

$$\langle Q, L_n\rangle = 0 + \frac{(-1)^{k+1}}{2^n n!}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{k+1}}{\mathrm{d}x^{k+1}}[Q(x)] \frac{\mathrm{d}^{n-(k+1)}}{\mathrm{d}x^{n-(k+1)}}\left[(x^2-1)^n\right]\mathrm{d}x.$$

D'après le principe de récurrence, on peut conclure que la propriété est vraie pour tout k entre 0 et n.

(c) Nous avons démontré que la propriété ci-dessus est vraie pour $k=n$. On a donc, pour un polynôme Q de E,

$$\langle Q, L_n\rangle = \frac{(-1)^{n}}{2^n n!}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}[Q(x)] \frac{\mathrm{d}^{n-n}}{\mathrm{d}x^{n-n}}\left[(x^2-1)^n\right]\mathrm{d}x.$$

Or, si $Q \in E_{n-1}$, son degré n'excède pas $n-1$ et sa dérivée $n$ème est nulle. On a donc $\langle Q, L_n\rangle = 0$, ce qui donne bien que Q est dans l'orthogonal de E_{n-1} (l'énoncé dit *orthogonal à* $n-1$).

Fixons $k \in [\![1,n]\!]$. Ce qui précède démontre que L_k est orthogonal à tous les polynômes de E_{k-1} donc notamment aux polynômes $L_0, L_1, \ldots, L_{k-1}$ qui sont bien tous de degré inférieur à $k-1$. Ceci démontre que les polynômes $L_0, \ldots, L_n$ sont orthogonaux deux à deux.

6. (a) En utilisant 10.b avec $Q = L_n$ et $k=n$, on obtient

$$\|L_n\|^2 = \langle L_n, L_n\rangle = \frac{(-1)^{n}}{2^n n!}\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}x^{n}}[L_n(x)] \frac{\mathrm{d}^{n-n}}{\mathrm{d}x^{n-n}}\left[(x^2-1)^n\right]\mathrm{d}x$$

Or, on l'a vu, L_n est un polynôme de degré n. Sa dérivée $n$ème est égale à celle de son terme de plus haut degré $\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}X^n$, soit

$$\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}\cdot n(n-1)\cdots 1 = \frac{1}{2^n}\frac{(2n)!}{n!\cancel{n!}}\cdot\cancel{n!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\|L_n\|^2 = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\cdot\frac{(2n)!}{2^n n!}\int_{-1}^{1}\left[(x^2-1)^n\right]\mathrm{d}x = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}I_n.$$

(b)

$$I_{n+1} = \int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n+1}\cdot 1\mathrm{d}x = \left[(x^2-1)^{n+1}\cdot x\right]_{-1}^{1} - 2(n+1)\int_{-1}^{1} x(x^2-1)^n\cdot x\mathrm{d}x$$

Le crochet est nul et $x^2 = x^2-1+1$ donc

$$I_{n+1} = -2(n+1)I_{n+1} + 2(n+1)I_n$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_{n+1} = -\frac{2n+2}{2n+3}I_n.$$

(c) À l'aide d'un calcul classique pair/impair, fait plusieurs fois cette année et non détaillé ici, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad I_n = (-1)^n 2^{2n+1}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

(d) En combinant les résultats des questions a et b, on obtient

$$\begin{aligned}\|L_n\|^2 = \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\binom{2n}{n}I_n &= \frac{(-1)^n}{2^{2n}}\frac{(2n)!}{\cancel{(n!)^2}}(-1)^n 2^{2n+1}\frac{\cancel{(n!)^2}}{(2n+1)!}\\ &= \frac{2}{2n+1}.\end{aligned}$$

On obtient donc bel et bien

$$\boxed{\|L_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}}.$$

7. (a) La famille

$$\left(\sqrt{\frac{2k+1}{2}}L_k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$$

est une base orthonormée de E_n. En effet, on a d'abord démontré que $(L_0, \ldots, L_n)$ était une famille de polynômes orthogonaux et non nul : on obtient bien une famille orthonormée en renormalisant. Cette famille orthonormée est libre d'après le cours (ce qui se voit aussi avec l'échelonnement en degré) et son cardinal vaut $n+1 = \dim(E_n)$: c'est bien une b.o.n. de E_n.

(b) On sait calculer un projeté orthogonal sur un sous-espace vectoriel dont on connaît une une base orthonormée : pour $P \in E$,

$$p_n(P) = \sum_{k=0}^{n} \langle P, \frac{L_k}{\|L_k\|} \rangle \frac{L_k}{\|L_k\|} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle P, L_k \rangle}{\|L_k\|^2} L_k.$$

(c) On sait d'après le cours que le polynôme de E_n "le plus proche" d'un polynôme $P \in E$ donné est son projeté orthogonal sur E_n, c'est-à-dire

$$d(P, E_n) = \|P - p_n(P)\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} \left(P(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{\langle P, L_k \rangle}{\|L_k\|^2} L_k(x) \right)^2 \mathrm{d}x}.$$