Lycée Condorcet — Juin 2024
PCSI

Espaces préhilbertiens réels

Produits scalaires et normes.

Exercice 1.
Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts. Soit l'application

$$\begin{array}{cccc} \langle \cdot, \cdot \rangle & \mathbb{R}_n[X]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (P,Q) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k) \end{array}.$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 2.
Soit E l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Soit l'application

$$\begin{array}{cccc} \langle \cdot, \cdot \rangle & E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (f,g) & \longmapsto & a\int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t + f(0)g(0) \end{array}.$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire sur E.

Exercice 3.
Montrer que $(X,Y) \mapsto {}^tX \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} Y$ définit un produit scalaire sur $M_{2,1}(\mathbb{R})$.
Démontrer que les vecteurs $(1,0)$ et $(1,-3)$ sont orthogonaux. Que pensez-vous de cet "angle droit" ?

Exercice 4.
Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \leq n \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$.
Pour quels n-uplets a-t-on égalité ?

Exercice 5.
Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum\limits_{k=1}^{n} x_i = 1$. Montrer que $\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$. Étudier le cas d'égalité.

Orthogonalité.

Exercice 6.
Montrer que deux vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \|x + \lambda y\| \geq \|x\|.$$

Exercice 7.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace euclidien E.
Montrer que :

$$(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \quad \text{et} \quad (F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp.$$

Quelles sont les inclusions qui demeurent en dimension infinie ?

Exercice 8.
On munit $\mathbb{R}_3[X]$ du produit scalaire

$$\begin{array}{cccc} \Phi & \mathbb{R}_3[X]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (P,Q) & \longmapsto & \Phi(P,Q) := \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t \end{array}.$$

1. Vérifier que Φ est bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Construire une base de $\mathbb{R}_2[X]$, orthonormée pour ce produit scalaire.
3. Donner la décomposition de X^3+1 dans cette b.o.n.

Exercice 9.
On considère l'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on pose $M,N\rangle = Tr(M^TN)$.
1. Montrer que $\langle,\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Établir que :
$$\forall M \in E, \left(\sum_{i=1}^{n} m_{i,i}\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^{,} \sum_{j=1}^{n} m_i, j^2.$$
3. Montrer que l'orthogonal su sous-espace des matrices réelles est le sous-espace des matrices antisymétriques réelles.

Projection orthogonale.

Exercice 10.
Soit le s.e.v. de $\mathbb{R}^4$ donné par

$$F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x+y-z-t=0 \quad \text{et} \quad x+3y+z-t=0\right\}.$$

On note p la projection orthogonale sur F.
1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. En déduire la matrice de P dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
3. Soit e_1 le premier vecteur dans la base canonique.
Déterminer la distance de e_1 à F.

Exercice 11.
Soient $a_1,\ldots,a_n$ n réels fixés, non tous nuls. Soit H le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ défini par

$$H = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}.$$

1. Montrer que H est l'orthogonal d'un certain espace vectoriel que l'on précisera.
2. En déduire $\dim(H)$.
3. Calculer la matrice de la projection orthogonale de H dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 12.

1. Montrer que $(P|Q) = \sum\limits_{k=0}^{n} P^{(k)}(1)Q^{(k)}(1)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Justifier que $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P(1)=0\}$ est hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Démontrer que $1_{\mathbb{R}_n[X]} \in F^\perp$. Faire un dessin.
Calculer $d(1_{\mathbb{R}_n[X]}, F)$, la distance de $1_{\mathbb{R}_n[X]}$ à F.

Exercice 13.
Calculer $\inf\limits_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (e^x - ax - b)^2\ \mathrm{d}x$.