

Sommets et produits Corrections

Exercice 2.

- 1.
- 2.
3. Notons tout d'abord que, pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$

$$k^2 - 1 = (k + 1)(k - 1)$$

Procédons par analyse synthèse.

Analyse

Supposons qu'il existe un couple de réels (α, β) tel que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad \frac{\alpha}{k+1} + \frac{\beta}{k-1} = \frac{1}{k^2-1}$$

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{k+1} + \frac{\beta}{k-1} &= \frac{\alpha(k-1) + \beta(k+1)}{k^2-1} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)k + (-\alpha + \beta)}{k^2-1} \end{aligned}$$

Ainsi d'après l'égalité supposée, on aurait :

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad (\alpha + \beta)k + (-\alpha + \beta) = 1$$

En particulier, pour $k = 0$ et $k = 2$ on aurait :

$$\begin{aligned} \begin{cases} -\alpha + \beta &= 1 \\ (\alpha + \beta) \times 2 - \alpha + \beta &= 1 \end{cases} &\iff \begin{cases} -\alpha + \beta &= 1 \\ \alpha + 3\beta &= 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -\alpha + \beta &= 1 \\ 4\beta &= 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Le dernier système est obtenu en additionnant les deux lignes du système précédent. Et ainsi, si un tel couple existe alors on a :

$\alpha = -1/2, \quad \beta = 1/2$

Synthèse

Posons $\alpha = -1/2$ et $\beta = 1/2$.

Soit $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{k+1} - \frac{\beta}{k-1} &= \frac{-1/2}{k+1} + \frac{1/2}{k-1} \\ &= \frac{(-1/2)(k-1) + (1/2)(k+1)}{k^2-1} \\ &= \frac{1}{k^2-1} \end{aligned}$$

On a donc bien,

$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}, \quad \frac{-1/2}{k+1} + \frac{1/2}{k-1} = \frac{1}{k^2-1}$

Notons S_n la somme $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 - 1}$ on a alors :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \frac{-1}{k+1} + \frac{1}{k-1} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=2}^n \frac{-1}{k+1} + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k-1} \right] \end{aligned}$$

On procède à un changement d'indice $j = k - 1$ dans la deuxième somme :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2} \left[\sum_{k=2}^n \frac{-1}{k+1} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{j} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{n+1} + \left(\sum_{k=2}^{n-1} \frac{-1}{k+1} + \frac{1}{k} \right) + 1 \right] \end{aligned}$$

La dernière ligne a été obtenue en notant que les variables étaient muettes et en utilisant la relation de Chasles dans les deux sommes. On reconnaît une somme télescopique, on obtient alors :

$$S_n = -\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{2} + 1$$

Après calculs on obtient :

$$S_n = \frac{-4n+1}{2n(n+1)}$$

Exercice 3.

En séparant les termes avec indices pairs et impairs, simplifier la somme :

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$$

Correction

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$$

Comme un entier est soit pair soit impair on a, d'après la propriété de Chasles, l'égalité :

$$S_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} (-1)^k k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} (-1)^k k$$

Or, pour tout k pair on a $(-1)^k = 1$ et pour tout k impair on a $(-1)^k = -1$, d'où l'égalité :

$$S_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} k - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} k$$

Notons U_n la première somme et T_n la deuxième. Calculons ces deux sommes :

$$U_n = \sum_{k=1}^n 2k \qquad T_n = \sum_{k=1}^n 2k - 1$$

Ainsi on a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n 2k - \sum_{k=1}^n 2k + \sum_{k=1}^n 1 \\ &= n \end{aligned}$$

Ainsi, on a l'égalité :

$$S_n = n$$

Exercice 4

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ l'assertion :

$$P(n) : \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$$

Montrons par récurrence qu'elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation

On a, d'une part :

$$\sum_{k=1}^{2^0} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = 1$$

et, d'autre part :

$$\frac{0}{2} = 0$$

Ainsi, $P(0)$ est vraie.

Hérédité

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ vraie. On a, d'après la relation de Chasles :

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}$$

Considérons la dernière somme de l'égalité précédente. Notons que, pour tout $k \in \llbracket 2^n + 1, 2^{n+1} \rrbracket$ on a l'inégalité :

$$\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2^{n+1}}$$

Ainsi, en sommant toutes ces inégalités on obtient :

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{2^{n+1}} \iff \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \frac{2^{n+1} - (2^n + 1) + 1}{2^{n+1}}$$

Mais on a les égalités :

$$\frac{2^{n+1} - (2^n + 1) + 1}{2^{n+1}} = \frac{2^n(2 - 1)}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

On a donc

$$\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$$

En sommant cette inégalité avec l'hypothèse de récurrence on obtient :

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2}$$

et ainsi

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \geq \frac{n+1}{2}$$

Nous avons donc montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ est vraie alors $P(n+1)$ est vraie. Le principe de récurrence permet ainsi de conclure que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

$$\begin{array}{ll} 1. & U_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \max(i, j). \\ 2. & V_n = \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij \\ 3. & W_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |i - j| \end{array} \quad \begin{array}{ll} 4. & X_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i \\ 5. & Y_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij \end{array}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad V_n &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} ij \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} ij \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \left(i \sum_{1 \leq j \leq n} j \right) && \text{On a factoriser } i \text{ c'est une constante en } j. \\ &= \left(\sum_{1 \leq i \leq n} i \right) \times \left(\sum_{1 \leq j \leq n} j \right) && \text{On a factorisé la deuxième somme car c'est une constante en } i. \end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{1 \leq i, j \leq n} ij = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2}$$

$$\begin{aligned} 5. \quad Y_n &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij \\ &= \sum_{2 \leq j \leq n} \sum_{1 \leq i \leq j-1} ij \\ &= \sum_{2 \leq j \leq n} \left(j \sum_{1 \leq i \leq j-1} i \right) \\ &= \sum_{2 \leq j \leq n} j \frac{(j-1)j}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{2 \leq j \leq n} j^3 - \sum_{2 \leq j \leq n} j^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{1 \leq j \leq n} j^3 - \sum_{1 \leq j \leq n} j^2 - 1 + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_n &= \frac{1}{2} \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right] \\
&= \frac{n(n+1)}{4} \times \frac{3n(n+1) - 2(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)}{4} \times \frac{3n^2 - n - 2}{6}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\sum_{1 \leq i < j \leq n} ij = \frac{n(n+1)}{4} \times \frac{(n-1)(n+\frac{2}{3})}{6}}$$

Exercice 10.

Soit n un entier naturel. On considère la somme double $S_n = \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n 2^j$.

1. Vérifier que $S_n = n2^{n+1} + 1$.

2. Démontrer que $S_n = \sum_{j=0}^n (j+1)2^j$.

3. En déduire que $\sum_{k=1}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.

4. Déterminer alors la valeur de la somme double $T_n = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{i+1} k2^{k-1}$.

Correction :

1. On a la suite d'égalités :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n 2^j \\
&= \sum_{k=0}^n 2^k \sum_{j=k}^n 2^{j-k}
\end{aligned}$$

On procède au changement d'indice $l = j - k$ dans la deuxième somme. On obtient alors :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^n 2^k \sum_{l=0}^{n-k} 2^l \\
&= \sum_{k=0}^n 2^k \frac{1 - 2^{n-k+1}}{1 - 2} \\
&= \sum_{k=0}^n 2^{n+1} - 2^k \\
&= (n+1)2^{n+1} - \frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \\
&= (n+1)2^{n+1} + 1 - 2^{n+1}
\end{aligned}$$

On obtient donc bien

$$\boxed{S_n = n2^{n+1} + 1}$$

2. En échangeant les sommes on obtient :

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=k}^n 2^j \\
 &= \sum_{j=0}^n \sum_{k=0}^j 2^j \\
 &= \sum_{j=0}^n (j+1)2^j
 \end{aligned}$$

3. On obtient l'égalité suivante en procédant au changement d'indice $k = j + 1$

$$S_{n-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)2^j = \sum_{k=1}^n k2^{k-1}$$

Ainsi d'après les deux questions précédentes on a :

$$\sum_{k=1}^n k2^{k-1} = S_{n-1} = (n-1)2^n + 1$$

D'où

$$\boxed{\sum_{k=1}^n k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1}$$

4. En utilisant deux fois le résultat démontré dans la question précédente on obtient :

$$\begin{aligned}
 T_n &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{i+1} k2^{k-1} \\
 &= \sum_{i=1}^n i2^{i+1} + 1 \\
 &= 4 \sum_{i=1}^n i2^{i-1} + \sum_{i=1}^n 1 \\
 &= 4((n-1)2^n + 1) + n \\
 &= (n-1)2^{n+3} + 4 + n
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\boxed{T_n = (n-1)2^{n+3} + 4 + n}$$