L'objectif de ce document est de proposer quelques exercices préparatoires à votre rentrée en MPSI ou PCSI (les MPSI on quasiment le même document). Ils peuvent être traités dans l'ordre souhaité, et au rythme qui vous conviendra. La partie sur le calcul élémentaire doit être absolument maîtrisée (et peut être sautée si vous savez déjà faire). Viennent ensuite quelques exercices sur le programme de terminale.

Table des matières

1 Révisions de calcul élémentaire - Exercices

Fractions

Rappels : On suppose que chaque dénominateur est non nul. On peut écrire :

$\dfrac{a}{c} \pm \dfrac{b}{c} = \dfrac{a \pm b}{c}$ Exemple : $\dfrac{2}{3} - \dfrac{7}{3} = \dfrac{2-7}{3} = \dfrac{-5}{3}$

$\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd}$ Exemple : $\dfrac{3}{8} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{3\times 3}{8\times 3} + \dfrac{2\times 8}{3\times 8} = \dfrac{9+16}{24} = \dfrac{25}{24}$

$\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ Exemple : $\dfrac{-3}{5} \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{-3\times 1}{5\times 7} = \dfrac{-3}{35}$

$k \times \dfrac{a}{b} = \dfrac{ka}{b}$ Exemple : $6 \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{6\times 3}{8} = \dfrac{18}{8} = \dfrac{9}{4}$

$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{a}{b} \times \dfrac{d}{c} = \dfrac{ad}{bc}$ Exemple : $\dfrac{\frac{1}{4}}{\frac{7}{9}} = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{9}{7} = \dfrac{9}{28}$

Règle de simplification : si k est le pgcd de a et b (on peut écrire $a = k \times a'$ et $b = k \times b'$, avec k, k' des entiers relatifs), alors

$$\frac{a}{b} = \frac{ka'}{kb'} = \frac{a'}{b'}$$

Il faut toujours chercher à simplifier les fractions dès que possible. Par exemple pour calculer $\frac{9}{4} \times \frac{10}{3}$, on évitera d'écrire $= \frac{90}{12}$ puis simplifier, on préférera écrire :

$$\frac{9}{4} \times \frac{10}{3} = \frac{3\times \cancel{3}}{2\times \cancel{2}} \times \frac{5\times \cancel{2}}{\cancel{3}} = \frac{3\times 5}{2} = \frac{15}{2}$$

Puissances entières

Rappels : Pour tous réels a et b non nuls, m et n entiers, on peut écrire :

$a^n \times a^m = a^{n+m}$	Exemple :	$2^3 \times 2^6 = 2^{3+6} = 2^9$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	Exemple :	$\frac{5^8}{5^2} = 5^{8-2} = 5^6$
$(a \times b)^n = a^n \times b^n$	Exemple :	$(3 \times 7)^2 = 3^2 \times 7^2$
$(a^n)^m = a^{n \times m}$	Exemple :	$(10^3)^5 = 10^{3\times 5} = 10^{15}$
$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$	Exemple :	$10^{-2} = \dfrac{1}{10^2} = \dfrac{1}{100} = 0,01$

1. Simplifier les nombres suivants :

$$A = 3^2 \times 3^{-4} \times 3^7 \times 3 \qquad E = 81^5 \times (3^{-2})^{-5} \times \frac{1}{9} \qquad H = \left(\frac{2}{3}\right)^{11} \times \left(\frac{3}{2}\right)^{10}$$

$$B = \frac{2 \times 2^2 \times 2^3}{2^4 \times 2^5} \qquad F = \frac{4^{-2} \times 8^3}{16^3} \qquad I = (a^3)^2 \times a^{-4}$$

$$C = (2 \times 3^2 \times 3^3)^4 \qquad D = \frac{2^3 \times 5^4 \times 7^3}{5^3 \times 7^2 \times 2} \qquad G = \frac{9^3 \times 27^2 \times 75}{5^2 \times 3^4} \qquad J = a^2 b^{-3} (ab)^4$$

2. $A = \dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}, \qquad B = 2^{21} + 2^{22}, \qquad C = \dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$

Racines carrées

Rappels : pour tous réels a et b positifs, on peut écrire :

	$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$	Exemple :	$(\sqrt{3})^2 = \sqrt{9} = 3$
	si $a > 0$, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$	Exemple :	$4^{\frac{1}{2}} = 2$
	$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$	Exemple :	$\sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$
	$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$	Exemple :	$\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$
Attention !	$\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$	Exemple :	$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$

3. Simplifier l'écriture des nombres suivants (on essaiera de les mettre sous forme $a\sqrt{b}$ avec b le plus petit possible).

— $A = \sqrt{12}$

— $B = \sqrt{48}$

— $C = \sqrt{36 + 64}$

— $D = 3\sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 5\sqrt{2}$

— $E = 5\sqrt{27} - 2\sqrt{48}$

— $F = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{242}} \times \sqrt{\frac{98}{25}}$

— $G = \frac{3}{\sqrt{7}}$

— $H = (2 - \sqrt{3})^2$

— $I = 3(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})$

4. Même consigne pour les nombres ci-dessous

— $A = \sqrt{7}^3$ — $B = \sqrt{17}^5$ — $C = \sqrt{5}^4$ — $D = \sqrt{17}^4$ — $E = \sqrt{17}^4$

Calcul littéral et identités remarquables.

Rappels : Pour tous réels a et b :

(forme factorisée)		(forme développée)
$(a-b)\times(a+b)$	$=$	a^2-b^2
$(a+b)^2$	$=$	$a^2+2\times a\times b+b^2$
$(a-b)^2$	$=$	$a^2-2\times a\times b+b^2$

5. Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x.
   (a) $\left(2x-\dfrac{1}{2}\right)^3$
   (b) $(x-1)^3\left(x^2+x+1\right)$
   (c) $(x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)$
   (d) $(x+1)^2(x-1)\left(x^2+x+1\right)$
6. Même consigne :
   (a) $(x-2)^2\left(-x^2+3x-1\right)-(2x-1)(x^3+2)$
   (b) $(2x+3)(5x-8)-(2x-4)(5x-1)$
   (c) $\left((x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)+1\right)x-x^6-x^5+2$
7. Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.
   (a) $-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$
   (b) $25-(10x+3)^2$
   (c) $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64$

2 Solutions des exercices de calcul élémentaire

1. $A = 3^6$, $B = 2^{-3} = 1/2^3$, $C = 2^4 * 3^{20}$, $D = 2^2 * 5 * 7 = 140$, $E = 9^{14}$, $F = 1/2^7$, $G = 3^9$, $H = 2/3$, $I = a^2$, $J = a^6 b$.
2. $A = 2^{-4} \cdot 3^{-1}$, $B = 2^{21} \cdot 3$, $C = 2$
3. $A = 2\sqrt{3}$, $B = 4\sqrt{3}$, $C = 10$, $D = 6\sqrt{2}$, $E = 11\sqrt{3}$, $F = 63/55$, $G = 3\sqrt{7}/7$, $H = 5 - 4\sqrt{3}$, $I = -3$.
4. $A = 7\sqrt{7}$, $B = 289\sqrt{17}$, $C = 25$, $D = 289$, $E = 289$.
5. (a) $8x^3 - 6x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{8}$
   (b) $x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$
   (c) $x^5 - x^3 + x^2 - 1$
   (d) $x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$
6. (a) $-2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4$
   (b) $-28 + 21x$
   (c) $2 + x^3 - x^4 - x^5$
7. (a) $-6(6x + 7)$
   (b) $4(5x + 4)(-5x + 1)$
   (c) $2(3x - 4)(10x + 3)$

3 Exercices

Voici quelques exercices reprenant des notions vues en terminale.

Fonctions d'une variable réelle

1. Faire l'étude des fonctions listées *infra* sur leurs ensembles de définition respectifs. Par "faire l'étude", on entend dresser le tableau de variation (avec les éventuelles limites), énoncer d'éventuelles propriétés remarquables (parité, périodicité, convexité, ...) et tracer l'allure de la courbe.

   (a) $f : x \mapsto \ln(1+x+x^2)$; (c) $h : x \mapsto \ln(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\ln(x)$; (e) $j : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right)$

   (b) $g : x \mapsto e^{2x^3+7}$; (d) $i : x \mapsto \ln\left(\frac{2}{1+x^2}\right)$; (f) $k : x \mapsto x\mathrm{e}^{x^2-1}$.

2. Établir, pour tout $x \geqslant 0$, l'encadrement
$$x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x\ .$$

3. Déterminer les limites suivantes :

   (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$; (c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$;

   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$; (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x}$.

4. Montrer que pour tous $a, b > 0$
$$\frac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leqslant \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\ .$$

5. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Démontrer qu'il existe un $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

6. Soit f une fonction continue strictement décroissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = x^n$ admet une unique solution sur $[0,1]$, que l'on notera x_n.
   (b) Faire un dessin pour visualiser les premiers termes de la suite $(x_n)_n$.
   (c) Démontrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Trigonométrie

7. Résoudre les équations suivantes sur $]-2\pi, 2\pi[$:

   (a) $\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$ (b) $2\cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = -1$

8. On cherche à résoudre sur $[0, 2\pi[$ l'inéquation :
$$(I) :\ 2\cos^3(x) - 3\cos^2(x) + 1 \geqslant 0$$
   (a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$. Vérifier que $f(1) = 0$.
   (b) Déterminer les réels a, b et c vérifiant $f(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$.
   (c) Étudier le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   (d) En déduire les solutions de (I).

Équations différentielles et primitives

9. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$h(x) = x\left(1 - \mathrm{e}^{x^2-1}\right).$$
   (a) Déterminer le signe de $h(x)$ sur l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.

(b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$.

10. Résoudre les équations différentielles suivantes :
Indication : on pourra rechercher une solution particulière sous une forme similaire à celle du second membre.
(a) $y' + 2y = t^2 + t + 1$ sur $\mathbb{R}$; (c) $y' + 2y = (x+1)\sin(x)$ sur $\mathbb{R}$.
(b) $y' + 3y = (x^2+1)\,e^{-3x}$ sur $\mathbb{R}$;

11. Calculer les intégrales suivantes.

$$\mathrm{I} = \int_0^{\pi/2} x\sin x\ \mathrm{d}x, \qquad \text{et} \qquad \mathrm{J} = \int_0^1 \sqrt{e^x}\ \mathrm{d}x.$$

Suites numériques

12. Étudier la convergence des suites de termes généraux suivants :
(a) $u_n = (-1)^n e^{-n}$; (b) $v_n = \dfrac{n^2+7n+12}{n^3+n^4}$; (c) $w_n = \exp\left(\dfrac{1}{n}\right)$; (d) $x_n = \cos(n\pi)$.

13. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, avec $a \notin \{0,1\}$. On considère une suite $(u_n)_n$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = au_n + b\,.$$

(a) Déterminer un réel r tel que pour tout entier naturel n,

$$u_n = a^n\,(u_0 - r) + r\,.$$

(b) Que dire de la suite définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n - r$?

14. On pose $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n + 2}\,.$$

Démontrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente et déterminer sa limite. *Indication : on pourra commencer par démontrer que $(u_n)_n$ est décroissante.*

15. On considère la suite (F_n) définie par $\mathrm{F}_0 = 0, F_1 = 1$ et par la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_n + F_{n+1}\,.$$

(a) Calculer F_2, F_3 et F_4.
(b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2}F_n - F_{n+1}^2 = (-1)^n$.

4 Pistes pour les exercices

1. .
2. On peut étudier les fonctions "différences" comme par exemple $x \mapsto x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$, puis dresser sont tableau de variations...
3. On cherche à reconnaître un nombre dérivé...
4. Se ramener à comparer $2ab$ et $a^2 + b^2$...
5. Un théorème bien connu... à savoir bien rédiger.
6. Soit f une fonction continue strictement décroissante de $[0,1]$ dans $[0,1]$.
   (a) Encore un théorème bien connu...
   (b)
   (c) Montrer que $x_{n+1} > x_n$ dans un premier temps. On pourra montrer que $\ell < 1$ n'est pas possible.
7.
8. d) On montrera que (I) est équivalent à $\cos(x) \geqslant -\frac{1}{2}$
9. (a)
   (b) On écrira $h(x) = x\left(1 - \mathrm{e}^{x^2-1}\right) = x - x\mathrm{e}^{x^2-1}$
10.
11. Pour I, on pourra effectuer une intégration par parties. Pour J écrire la racine comme une puissance $\frac{1}{2}$.
12. Étudier la convergence des suites de termes généraux suivants :
    (a) encadrer ; (b) factoriser ; (c) composer (d) simplifier.
13.
14.
15. b) Petite récurrence...