3. Dans cette question, on note $u = \cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$
   (a) Justifier que $16u^5 - 20u^3 + 5u = 0$
   (b) Résoudre l'équation du second degré $(E)$ : $16x^2 - 20x + 5 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$
   (c) En déduire deux valeurs possibles pour $u$
   (d) Justifier que $u > \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et vérifier que $\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}} < \frac{\sqrt{2}}{2}$
   (e) En déduire : $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$
4. Déterminer alors successivement la valeur des nombres : $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

**Exercice 4**

1. Etablir : $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$ (on pourra commencer par observer : $\cos^4 x = \left(\cos^2 x\right)^2$ )
   *remarque : on a ici « linéarisé » $\cos^4(x)$ ( disparition des puissances, au prix de l'apparition de multiples de l'angle $x$)*
2. En déduire :
   (a) une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fontion $x \longmapsto \cos^4 x$.
   (b) la valeur de l'intégrale $\int_0^{2\pi} \cos^4 x \, \mathrm{d}x$

   *remarque : cette deuxième question met en évidence l'utilité de la technique de linéarisation : celle-ci peut parfois permettre de débloquer un calcul de primitive (ou dérivée) et donc d'intégrale.*

**Exercice 5**

1. (a) Compléter : $\cos(5x) + \sin(5x) = \sqrt{2}\cos(5x - \dots)$
   *remarque : ce type d'initiative, consistant à écrire, ici, $1 = \sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$, pour faire apparaître une valeur trigonométrique remarquable, est fréquent ; on le rencontre par exemple aussi avec les nombres complexes (technique de « mise en facteur du module »)*
   (b) Compléter alors les assertions ci-dessous :

   *(exemple de résolution d'une équation en raisonnant par équivalences)*
   $\cos(5x) + \sin(5x) = 0 \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $5x - \dots = \dots$
   " $\iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \dots$
   d'où : $\mathscr{S} = \{ \ \dots \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$ *(lire : ensemble des nombres de la forme ... lorsque $k$ décrit $\mathbb{Z}$)*

2. Résoudre à présent en autonomie l'équation $\mathscr{E}_2$ : $\sqrt{3}\sin(2x) - \cos(2x) = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

**Exercice 6**

1. *Résolution guidée d'une équation trigonométrique.*
   Compléter la série d'équivalences ci-dessous ainsi que la conclusion finale :

   $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right) \iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\left(3x + \frac{\pi}{3} = \left(\frac{2\pi}{3} - x\right) + 2k\pi\right)$ ou ( ... )
   " $\iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(4x = \dots + 2k\pi)$ ou ( ... )
   " $\iff$ il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(x = \dots)$ ou $(x = \dots)$
   d'où : $\mathscr{S} = \{ \ \dots \ , \ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{ \ \dots \ , \ k \in \mathbb{Z}\}$

2. Résoudre à présent en autonomie l'équation $\mathscr{E}_2$ : $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
3. Résoudre à présent en autonomie l'équation $\mathscr{E}_3$ : $\sin(3x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

◇ *formules à connaître par cœur impérativement :*

→ *formules élémentaires (se visualisent sur le cercle trigonométrique) :*

$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\cos(-x) = \cos x$ | $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$ | $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ | $\cos(x+\pi) = -\cos x$ |
| $\sin(-x) = -\sin x$ | $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$ | $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ | $\sin(x+\pi) = -\sin x$ |

→ *formules d'addition* (à connaître impérativement, elles entraînent toutes les autres) *et duplication* :

$$\begin{array}{|lcl|}\hline \cos(a+b) & = & \cos a\cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) & = & \cos a\cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) & = & \sin a\cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) & = & \sin a\cos b - \cos a \sin b \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|lcl|}\hline \cos 2x & = & \cos^2 x - \sin^2 x \\ \cos 2x & = & 2\cos^2 x - 1 \\ \cos 2x & = & 1 - 2\sin^2 x \\ \hline \sin 2x & = & 2\sin x\cos x \\ \hline \end{array}$$

→ *formules de linéarisation* :

$$\begin{array}{|lcl|}\hline \cos a\cos b & = & \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)] \\ \sin a\sin b & = & \frac{1}{2}[\cos(a-b)-\cos(a+b)] \\ \sin a\cos b & = & \frac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)] \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|l|}\hline \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \text{ ou } 1+\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \text{ ou } 1-\cos x = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \\ \hline \end{array}$$

→ *transformations de sommes en produits (moins connues, ces formules s'établissent par exemple à partir des formules d'addition, ou bien en utilisant les nombres complexes) :*

$$\begin{array}{|lcl|lcl|}\hline \sin p + \sin q & = & 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) & \cos p + \cos q & = & 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \sin p - \sin q & = & 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) & \cos p - \cos q & = & -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \\ \hline \end{array}$$

## 2.2 Exercices

**Exercice 1**

1. Rappeler la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
2. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ en utilisant une formule de linéarisation.
3. Déterminer alors la valeur de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

**Exercice 2**

1. (a) Simplifier $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$
   (b) En déduire une première expression de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
2. En procédant comme dans l'exercice précédent, déterminer une seconde expression de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
3. Vérifier dans chacun des cas l'égalité des deux expressions obtenues.

**Exercice 3**

1. (a) Rappeler l'expression de $\cos(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$
   (b) Déterminer une expression de $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ du même type, en utilisant une formule d'addition.
   (c) Rappeler l'expression de $\sin(2\theta)$ en fonction de $\sin(\theta)$ et $\cos(\theta)$
   (d) Déterminer une expression de $\sin(3\theta)$ de la forme $\sin(\theta)\times$« expression fonction de $\cos\theta$ » en procédant comme en 1. (b).
2. A l'aide des questions précédentes, établir : $\cos(5\theta) = 16\cos^5(\theta) - 20\cos^3(\theta) + 5\cos(\theta)$

CHAPITRE 2

# Trigonométrie

## 2.1 Formulaire

◇ *cercle trigonométrique, noté ici $\mathscr{C}$ :*

les compétences ci-dessous sont supposées acquises ; dans le cas contraire, il est nécessaire de combler ses lacunes :

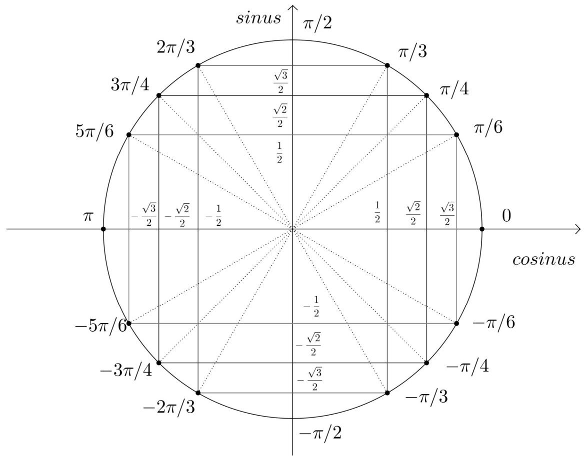
- sens direct
- visualisation de $\cos x$ et $\sin x$ sur les axes, étant donné un point $M(x) \in \mathscr{C}$
- situation précise sur $\mathscr{C}$ des points :
  - d'une part : $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, $M(\pi)$, $M\left(\frac{3\pi}{2}\right)$
  - d'autre part : $M\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $M\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $M\left(-\frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(-\frac{\pi}{2}\right)$, $M\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$, $M\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$, $M(-\pi)$, $M\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$
- situation précise sur $\mathscr{C}$ des points $M\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $M\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, $M(\pi - x)$, et $M(\pi + x)$, étant donné $M(x) \in \mathscr{C}$

◇ *fonctions sinus et cosinus :*

les propriétés ci-dessous concernant ces deux fonctions sont supposées connues (mêmes recommandations) :
périodicité, parité, dérivées, valeurs remarquables, variations, courbes représentatives.

◇ *valeurs remarquables :*

| $x$ | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-1$ |
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 0 |




*N.B. maîtriser ce tableau signifie aussi savoir compléter rapidement des égalités du type :* $-\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\dots)$

◇ *résolution d'équations - schémas de raisonnement à comprendre & connaître par cœur :*

- étant donné $\alpha \in \mathbb{R}$, les équations ci-dessous, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, se résolvent selon la démarche indiquée ; les assertions se visualisent sans difficulté sur le cercle trigonométrique ;
dans chacun des cas, la seconde assertion est une reformulation, en termes de congruences, de la première.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\cos x = \cos\alpha$ | $\iff$ | $(\exists k \in \mathbb{Z},\ x = \alpha + 2k\pi)$ ou $(\exists k \in \mathbb{Z},\ x = -\alpha + 2k\pi)$ |
| soit : | $\cos x = \cos\alpha$ | $\iff$ | $x \equiv \alpha\ [2\pi]$ ou $x \equiv -\alpha\ [2\pi]$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\sin x = \sin\alpha$ | $\iff$ | $(\exists k \in \mathbb{Z},\ x = \alpha + 2k\pi)$ ou $(\exists k \in \mathbb{Z},\ x = \pi - \alpha + 2k\pi)$ |
| soit : | $\sin x = \sin\alpha$ | $\iff$ | $x \equiv \alpha\ [2\pi]$ ou $x \equiv \pi - \alpha\ [2\pi]$ |

- *cas particuliers, dans lesquels les congruences « fusionnent » :*

| | | |
|---|---|---|
| $\cos x = 0$ | $\iff$ | $x \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ |
| $\cos x = 1$ | $\iff$ | $x \equiv 0\ [2\pi]$ |
| $\cos x = -1$ | $\iff$ | $x \equiv \pi\ [2\pi]$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\sin x = 0$ | $\iff$ | $x \equiv 0\ [\pi]$ |
| $\sin x = 1$ | $\iff$ | $x \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ |
| $\sin x = -1$ | $\iff$ | $x \equiv -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ |

**Exercice 4**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier l'écriture des quantités $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$.

**Exercice 5**

Simplifier les expressions ci-dessous après avoir considéré leur carré :

$A = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$ $\qquad B = \sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{9+4\sqrt{5}}$

**Exercice 6**

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ deux réels tels que $0 \leqslant b \leqslant a$.

1) calculer le carré de l'expression $\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}} + \sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}$

2) en déduire les égalités : $\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}} = \sqrt{14}$ et $\sqrt{5+\sqrt{21}} + \sqrt{5-\sqrt{21}} = \sqrt{14}$

## 1.2 Puissances

Rappel - règles de calcul concernant les puissances :

$x$ et $y$ désignant des réels quelconques non nuls :

- *puissance négative :* *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $x^{-n} \overset{\text{déf.}}{=} \dfrac{1}{x^n}$
- *pour tous* $n, m \in \mathbb{Z}$ : $x^{n+m} = x^n x^m$ $\qquad x^{n-m} = \dfrac{x^n}{x^m}$
- *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ : $(xy)^n = x^n y^n$ $\qquad \left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$
- *pour tous* $n, m \in \mathbb{Z}$ : $(x^n)^m = x^{nm}$ *(et non* $x^{(n^m)}$*, source d'erreur fréquente)*
- *pour tout* $n \in \mathbb{Z}$ : $(-x)^n = \begin{cases} x^n & \text{si n est pair} \\ -x^n & \text{si n est impair} \end{cases}$

**Exercice 1**

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$ deux réels non nuls. Simplifier au maximum les expressions ci-dessous :

$A = \left[(a^2b^3)^4\right]^5$ $\qquad B = \left(a^3b^{-4}\right)^2 . \left(-2a^{-5}b^6\right)^3$ $\qquad C = \left(\dfrac{a^2}{b^3}\right)^2 . \left(\dfrac{a}{4b}\right)^3 . \left(\dfrac{b^2}{a}\right)^2$ $\qquad D = \left(\dfrac{a^1b^{-2}}{a^{-3}b^4}\right)^5 . \left(\dfrac{a^{-6}b^5}{a^4b^{-3}}\right)^3$

**Exercice 2**

Simplifier au maximum les quantités ci-dessous :

$A = (-4)^{60} \times (-0.125)^{41}$ $\qquad B = 40^{71} \times (1.25)^{48} \times 10^{-119}$

**Exercice 3**

Simplifier au maximum les quantités ci-dessous :

$A = \dfrac{8^{73} \times 3^{-31}}{9^{-15} \times 2^{220}}$ $\qquad B = \dfrac{(5^2 \times 10^{-5})^3}{(5 \times 10^{-3})^5} \times \left(\dfrac{10^2}{5}\right)^2$ $\qquad C = \dfrac{(5^2 \times 11^{-5})^{-3}}{(11^5 \times 5^{-3})^2} \times \left[\dfrac{(11 \times 5)^2}{5^2 \times 11^4}\right]^3$

$D = \dfrac{(4^7 \times 3^{-12})^2}{(4^{-1} \times 3^6)^{-5}} \div \dfrac{(4^3 \times 3^{-2})^5}{(4^{-2} \times 3^5)^{-3}}$

CHAPITRE 1

# Manipulations calculatoires

## 1.1 Radicaux

**Exercice 1**

Développer, simplifier et regrouper au maximum, l'expression $A = (5\sqrt{3} - 7\sqrt{6})(2\sqrt{8} - 3)$

**Exercice 2**

Simplifier au maximum les expressions ci-dessous à l'aide d'un produit remarquable (attention aux signes) :

$A = (2\sqrt{3} - 3\sqrt{5})^2$
$B = (7\sqrt{2} - 5\sqrt{3})(5\sqrt{3} + 7\sqrt{2})$
$C = (7\sqrt{7} - 5\sqrt{5})(-7\sqrt{7} - 5\sqrt{5})$

$D = (\sqrt{72} - \sqrt{288})(\sqrt{288} - \sqrt{72})$
$E = (2 - \sqrt{3})^n(2 + \sqrt{3})^n$
($n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé)

Rappel - la « technique de l'expression conjuguée » :

◇ *exemples d'expressions conjuguées :*

→ une expression conjuguée de $2 + 3\sqrt{5}$ est $2 - 3\sqrt{5}$
→ une expression conjuguée de $\sqrt{2} - 1$ est $\sqrt{2} + 1$
→ une expression conjuguée de $2\sqrt{3} + 3\sqrt{5}$ est $2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$ (par contre, $-2\sqrt{3} - 3\sqrt{5}$ n'en est pas une)

◇ *principe de la technique :*

☠ un quotient dont le dénominateur comporte des radicaux, comme $\dfrac{4 + 3\sqrt{5}}{3 + 2\sqrt{7}}$, doit être systématiquement réécrit afin que les radicaux du dénominateur disparaissent

⇨ la « technique de l'expression conjuguée » consiste à multiplier le numérateur et le dénominateur du quotient par une expression conjuguée du dénominateur, ce dernier étant alors transformé en une expression de la forme $(a + b)(a - b)$, ie $a^2 - b^2$, ces carrés faisant alors en principe disparaître les radicaux.

◇ *pour aller plus loin :*

→ une technique parallèle pour réécrire les quotients de nombres complexes dans lesquels le dénominateur n'est pas réel (ie « comporte du $i$ ») est exposée dans le chapitre 6
exemple : réécrire $\dfrac{3 - 2i}{5 + 4i}$ sous la forme d'un quotient dont le dénominateur est réel

→ une technique parallèle pour lever certaines formes indéterminées est exposée au chapitre 3
exemple 1 : déterminer la limite, lorsque $x \to +\infty$ de $\sqrt{x^2 + 1} - x$
exemple 2 : déterminer la limite, lorsque $x \to +\infty$ de $\sqrt{x^4 + 3x^2} - x^2$

**Exercice 3**

Réécrire les expressions ci-dessous sans radical au dénominateur :

$A = \dfrac{1}{5 - 2\sqrt{2}}$ $\quad B = \dfrac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{5} + 1}$ $\quad C = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{5\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}$