Fiche second degré

1 Forme canonique

Soit un polynôme du second degré : $p(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

Sa forme canonique est : $p(x) = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$

à savoir faire sur des exemples

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ discriminant

2 Racines du trinôme

Les solutions de l'équation $p(x) = 0$ dépendent du signe du discriminant Δ

- Si $\Delta > 0$, on a deux racines distinctes : $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0$, on a une racine double : $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$
- Si $\Delta < 0$, pas de racine réelle.

3 Factorisation, somme et produit des racines

La factorisation de $p(x)$ dépend du signe du discriminant Δ

- Si $\Delta > 0$, $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

  La somme S et le produit P des racines valent alors : $S = -\dfrac{b}{a}$ et $P = \dfrac{c}{a}$

  Si on connaît un racine évidente x_1, alors $x_2 = \dfrac{P}{x_1}$
- Si $\Delta = 0$, $p(x) = a(x - x_0)^2$
- Si $\Delta < 0$, le trinôme ne se factorise pas.

4 Signe du trinôme

- Si $\Delta > 0$, le trinôme est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe de $-a$ à l'intérieur.

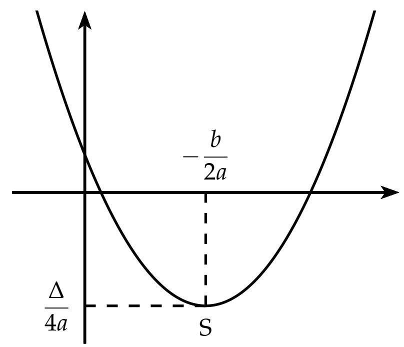
x	$-\infty$		x_2		x_1		$+\infty$
$p(x)$		signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

- Si $\Delta = 0$, le trinôme est nul en x_0 et du signe de a ailleurs.
- Si $\Delta < 0$, le trinôme est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

5 Variation et représentation

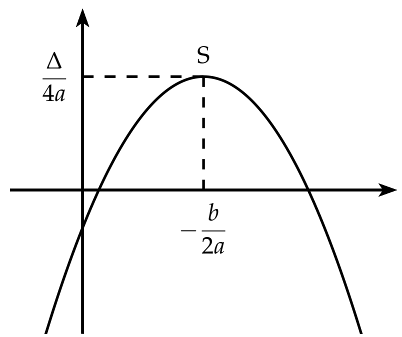
Si $a > 0$, la parabole est tournée vers le haut, on a donc les variations suivantes :

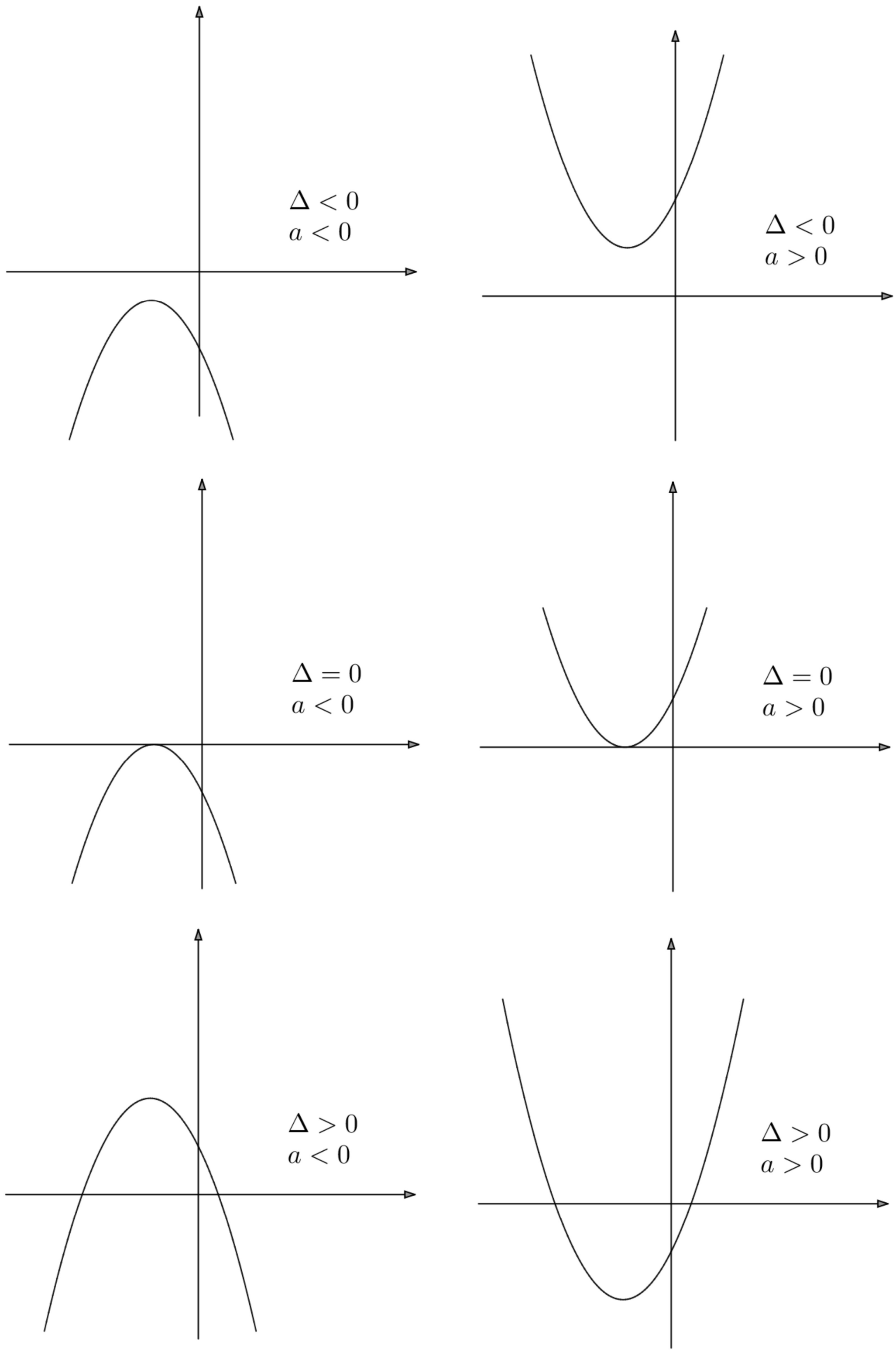
x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$p(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$



Si $a < 0$, la parabole est tournée vers le bas, on a donc les variations suivantes

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$p(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$





Ces illustrations doivent être interprétées en ayant en tête les énoncés des paragraphes 2 et 5.

Exercice 1. Les équations suivantes entrent-elles dans la catégorie des équations du second degré ? Résoudre chacune d'elles.

1) $(3x+1)(7x-8)=0$
2) $(t+1)^2+(t+2)^2+(t+3)^2=5t^2+6t+7$
3) $x^4-10x^2+1=0$
4) $e^{2x}+e^x-6=0$
5) $x\left(x^2+x-3\right)=x$
6) $tx^2-x+1=0$

1) Oui, car cette équation équivaut à $21x^2-17x-8=0$. Ses solutions sont évidemment $-\frac{1}{3}$ et $\frac{8}{7}$ (merci de ne pas développer... !)

2) Oui, car en développant, on peut écrire cette équation sous la forme $2t^2-6t-7=0$. Ses solutions sont $\frac{3+\sqrt{23}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{23}}{2}$.

Remarque. Le nom de l'inconnue importe peu ... pourvu qu'il n'y en ait qu'une ! Et dans le cas contraire, le contexte se doit de préciser qui est cette inconnue (cf. question 6).

3) Non : il s'agit d'une équation du quatrième degré.

Toutefois, on la résout en se ramenant à une équation du second degré : il suffit de poser $y=x^2$ et de résoudre $y^2-10y+1=0$. Cette dernière équation possède deux solutions : $y_1=5-2\sqrt{6}$ et $y_2=5+2\sqrt{6}$. Comme celles-ci sont positives, l'équation proposée possède quatre solutions :

$$x_1=\sqrt{5-2\sqrt{6}}\quad x_2=-\sqrt{5-2\sqrt{6}}\quad x_3=\sqrt{5+2\sqrt{6}}\quad x_4=-\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

On peut d'ailleurs voir (comment ?) que :

$$x_1=\sqrt{3}-\sqrt{2}\quad x_2=-\sqrt{3}+\sqrt{2}\quad x_3=\sqrt{3}+\sqrt{2}\quad x_4=-\sqrt{3}-\sqrt{2}$$

4) Non : il ne s'agit pas d'une équation du second degré en x.

Pour la résolution, on va poser $y=e^x$. L'équation transformée est $y^2+y-6=0$, dont les solutions sont $y_1=-3$ et $y_2=2$. Ainsi, pour $x\in\mathbb{R}$, on a :

$$e^{2x}+e^x-6=0\Leftrightarrow(e^x=-3\text{ ou }e^x=2)\Leftrightarrow e^x=2\Leftrightarrow x=\ln(2)$$

Finalement, l'ensemble de solutions est $\mathcal{S}=\{\ln(2)\}$.

5) Non : il s'agit d'une équation du troisième degré. La résolution d'une équation générale du troisième degré n'est pas une chose évidente ... mais cette équation particulière est vraiment simple. Elle équivaut à : $x\left(x^2+x-4\right)=0$, c'est-à-dire $x=0$ ou $x^2+x-4=0$. On conclut ainsi que l'ensemble des solutions de l'équation initiale est

$$\mathcal{S}=\left\{0,\ \frac{-1-\sqrt{17}}{2},\ \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right\}$$

6) Tout d'abord, la question est « quelle est l'inconnue ? ». Le texte ne le précise pas... et sans cette précision, impossible de répondre à la question.

Exercice 3. Un pétard est allumé puis lâché du haut d'un immeuble, sans vitesse initiale. On note $x(t)$ sa position (repérée sur un axe vertical orienté vers le bas, ayant pour origine sa position initiale) ; on rappelle que, pendant toute la durée de la chute libre et lorsqu'on néglige la résistance de l'air, on a :

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{où } g \text{ désigne l'accélération de la pensanteur}$$

Ce n'est qu'au bout de 5 secondes que la détonation se fait entendre.
Quelle distance le pétard a-t-il parcouru avant d'exploser ?
On négligera la resistance de l'air... mais pas le délai de propagation du son !
On supposera l'immeuble assez haut pour que le pétard n'atteigne pas le sol avant d'exploser.
Données : accélération de la pensanteur $g = 9,8\,ms^{-2}$; vitesse de propagation du son $v = 340\,ms^{-1}$.

Notons T la date d'impact avec le sol. On sait que si $0 \leqslant t \leqslant T$:

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

Notons v la vitesse de propagation du son, t_0 l'instant où le pétard explose et t_1 l'instant où l'on entend l'explosion.

Comme $t_1 - t_0$ est le temps mis par le son pour parcourir la distance $x(t_0)$:

$$t_1 - t_0 = \frac{x(t_0)}{v} = \frac{gt_0^2}{2v}$$

Puisque t_1 est connu, on dispose ainsi d'une équation du second degré en t_0 :

$$\frac{g}{2v}t_0^2 + t_0 - t_1 = 0$$

Seule la solution positive est acceptable ; ainsi :

$$t_0 = \frac{v}{g}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2gt_1}{v}}\right)$$

et finalement, la distance parcourue par le pétard avant qu'il n'explose est :

$$\boxed{H = x(t_0) = \frac{v^2}{2g}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2gt_1}{v}}\right)^2}$$

Par comparaison, si l'on ne tient pas compte du délai de propagation du son (ce qui revient à considérer que $t_1 = t_0$), alors la distance parcourue est :

$$H' = \frac{1}{2}gt_1^2$$

Application numérique :

Avec $t_1 = 5\,s$, $v = 340\,ms^{-1}$, $g = 9,8\,ms^{-2}$, on trouve $\boxed{H \simeq 107,5\,m}$ tandis que $H' \simeq 122,5\,m$.

Exercice 8. Résoudre l'inéquation :

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x+2}<4 \qquad (\star\star)$$

Tout d'abord, cette inéquation n'est définie que pour $x \in D = \mathbb{R} - \{-2, 1\}$. Pour un tel x, on obtient une inéquation équivalente en regoupant tous les termes dans un membre puis en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{x+2+2\,(x-1)-4\left(x^2+x-2\right)}{(x-1)\,(x+2)}<0$$

c'est-à-dire :

$$\frac{4x^2+x-8}{(x-1)\,(x+2)}>0$$

Le trinôme $4x^2+x-8$ admet pour racines :

$$\alpha=\frac{-1-\sqrt{129}}{8} \qquad \beta=\frac{-1+\sqrt{129}}{8}$$

D'où le tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		α		1		β		$+\infty$
$(x-1)(x+2)$		+	0	−		−	0	+		+	
$4x^2+x-8$		+		+	0	−		−	0	+	
$\frac{4x^2+x-8}{(x-1)(x+2)}$		+	‖	−	0	+	‖	−	0	+	

On a eu besoin de placer -2 et 1 par rapport à α et β, ce qui se fait aisément avec la technique mentionnée juste après l'énoncé de l'exercice 6.

Voici le détail : en posant $N(x) = 4x^2 + x - 8$, trinôme dont les deux racines sont α et β, on constate que $N(1) < 0$, ce qui prouve que $1 \in \left]\alpha, \beta\right[$. Par ailleurs, $N(-2) > 0$ et donc $-2 \in \left]-\infty, \alpha\right[\cup \left]\beta, +\infty\right[$ et comme de plus $N'(-2) = 8 \times (-2) + 1 = -15 < 0$, on conclut que $-2 \in \left]-\infty, \alpha\right[$.

On pouvait aussi voir, d'une part, que

$$\alpha<0<1=\frac{-1+\sqrt{81}}{8}<\frac{-1+\sqrt{129}}{8}=\beta$$

et, d'autre part, que :

$$\sqrt{129}<\sqrt{144}=12, \text{ donc } \alpha=\frac{-1-\sqrt{129}}{8}>\frac{-1-12}{8}=-\frac{13}{8}>-\frac{16}{8}=-2$$

On en déduit l'ensemble de solution de $(\star\star)$:

$$\boxed{\mathcal{S}=\left]-\infty,-2\right[\cup\left]\frac{-1-\sqrt{129}}{8},1\right[\cup\left]\frac{-1+\sqrt{129}}{8},+\infty\right[}$$

Exercice 9. On pose pour tout $m \in \mathbb{R}$:

$$f_m(x) = \left(m^2 - 1\right)x^2 - mx - 2$$

L'équation $f_m(x) = 0$ sera notée E_m.

1) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation E_m possède exactement une solution.

2) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation E_m possède exactement deux solutions.

3) On suppose remplie la condition de la question 2 et l'on note α_m et β_m les solutions de E_m. A quelle condition m est-il strictement compris entre α_m et β_m ?

1) Si $m \in \{-1, 1\}$, alors l'équation E_m est du premier degré et possède donc une unique solution. Sinon, il s'agit d'une équation du second degré et l'existence d'une unique solution équivaut à la condition $\Delta_m = 0$, avec :

$$\Delta_m = 9m^2 - 8$$

Ainsi, la condition cherchée est :

$$\boxed{m \in \left\{-1, -\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{2\sqrt{2}}{3}, 1\right\}}$$

2) On conserve la notation Δ_m précédente. La condition cherchée est cette fois :

$$m \notin \{-1, 1\} \quad \text{et} \quad \Delta_m > 0$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{m \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-1, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right[\cup \left]\frac{2\sqrt{2}}{3}, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[} \qquad (1)$$

3) La condition (1) est supposée remplie. On cherche à quelle condition m est compris (strictement) entre les racines α_m et β_m du trinôme f_m. On utilisera la méthode présentée plus haut (juste après l'énoncé de l'ex. n° 6).

La condition cherchée est donc $f_m(m)$ et $m^2 - 1$ soient de signes contraires, ou encore que $f_m(m)$ et $1 - m^2$ soient de même signe. On constate que :

$$f_m(m) = m^4 - 2m^2 - 2 = g\left(m^2\right)$$

où l'on a posé :

$$g(x) = x^2 - 2x - 2$$

Les racines de ce dernier trinôme sont :

$$x_1 = 1 - \sqrt{3} \qquad x_2 = 1 + \sqrt{3}$$

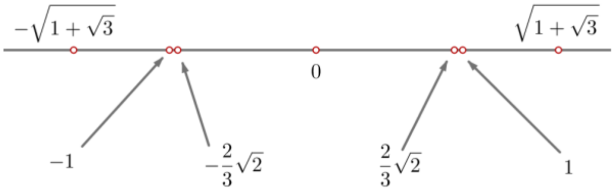
Ainsi :

$$f_m(m) < 0 \Leftrightarrow m^2 \in \left]x_1, x_2\right[$$

ou encore, vu que $x_1 < 0$:

$$f_m(m) < 0 \Leftrightarrow m^2 \in \left[0, x_2\right[\Leftrightarrow m \in \left]-\sqrt{1+\sqrt{3}}, \sqrt{1+\sqrt{3}}\right[$$

Avant d'aller plus loin, visualisons les positions relatives de tous ces nombres ($\pm\sqrt{x_2}$ et les extrémités des intervalles apparaissant dans la formule encadrée (1)) :



Donc :

3.a) Si $m \in \left]-1, -\frac{2\sqrt{2}}{3}\right[\cup \left]\frac{2\sqrt{2}}{3}, 1\right[$, alors a fortiori $m \in \left]-\sqrt{1+\sqrt{3}}, \sqrt{1+\sqrt{3}}\right[$ et donc $f_m(m) < 0$, alors que $1 - m^2 > 0$. Ces valeurs de m ne conviennent pas.

3.b) Si $m \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$, alors $1 - m^2 < 0$, donc $f_m(m)$ du signe de $1 - m^2$ si, et seulement si :

$$m \in \left]-\sqrt{1+\sqrt{3}}, -1\right[\cup \left]1, \sqrt{1+\sqrt{3}}\right[$$