FORMULES DE DÉRIVATION

Dans le premier tableau, on note I l'intervalle de définition de la fonction.

Dans le second, u et v désignent des fonctions dérivables sur un même intervalle I, sauf pour la formule de dérivation composée (en grisé).

Le troisième tableau rassemble quelques cas particuliers, d'usage courant, de la formule de dérivation composée.

$f(x)$	$f'(x)$	Précisions
x^α	$\alpha\, x^{\alpha-1}$	$\alpha \in [1,+\infty[$ et $I=[0,+\infty[$ ou bien $\alpha \in]-\infty,1[$ et $I=]0,+\infty[$ ou bien $\alpha \in \mathbb{N}$ et $I=\mathbb{R}$ ou bien $-\alpha \in \mathbb{N}^\star$ et $I \subset \mathbb{R}^\star$
e^x	e^x	
$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	$I=]0,+\infty[$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\tan(x)$	$1+\tan^2(x)=\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$I \subset \mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi;\, k\in\mathbb{Z}\right\}$

$f(x)$	$f'(x)$	Précisions
$u(x)+v(x)$	$u'(x)+v'(x)$	
$\lambda\, u(x)$	$\lambda\, u'(x)$	$\lambda \in \mathbb{R}$
$u(x)\, v(x)$	$u'(x)\, v(x)+u(x)\, v'(x)$	
$\dfrac{u(x)}{v(x)}$	$\dfrac{u'(x)\, v(x)-u(x)\, v'(x)}{v(x)^2}$	$\forall x \in I,\, v(x) \neq 0$
$v(u(x))$	$v'(u(x))\, u'(x)$	$u : I \to \mathbb{R}$ et $v : J \to \mathbb{R}$ avec $\forall x \in I,\, u(x) \in J$

$f(x)$	$f'(x)$	Précisions
$u(x)^n$	$n\, u(x)^{n-1}\, u'(x)$	$n \in \mathbb{N}$
$e^{u(x)}$	$u'(x)\, e^{u(x)}$	
$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\forall x \in I,\, u(x) > 0$

Formulaire

FORMULES DE DÉRIVATION : QUELQUES EXPLICATIONS

Application de la formule de dérivation composée à des cas particuliers :

(1) **La formule de dérivation composée (deuxième tableau) :**
Sous les hypothèses rappelées dans le formulaire :

$$\boxed{\text{lorsque } f(x) = v(u(x)), \text{ on a } f'(x) = u'(x) \times v'(u(x)).}$$

(2) **Où l'on retrouve les trois formules connues du troisième tableau :**
Sous les hypothèses rappelées dans le formulaire :

(a) Avec $v(t) = t^n$ on obtient, puisque $v'(t) = nt^{n-1}$, la formule de dérivation composée nous donne :

$$\boxed{\text{lorsque } f(x) = (u(x))^n, \text{ on a } f'(x) = u'(x) \times n(u(x))^{n-1}.}$$

(b) Avec $v(t) = \exp(t)$ on obtient, puisque $v'(t) = \exp(t)$, la formule de dérivation composée nous donne :

$$\boxed{\text{lorsque } f(x) = \exp(u(x)), \text{ on a } f'(x) = u'(x) \times \exp(u(x)).}$$

(c) Avec $v(t) = \ln(t)$ on obtient, puisque $v'(t) = \dfrac{1}{t}$, la formule de dérivation composée nous donne :

$$\boxed{\text{lorsque } f(x) = \ln(u(x)), \text{ on a } f'(x) = u'(x) \times \frac{1}{u(x)}.}$$

(3) **Où l'on retrouve une autre formule connue :**
Sous les hypothèses rappelées dans le formulaire, la formule de dérivation composée nous donne, avec $v(t) = \sqrt{t}$ (puisqu'alors $v'(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$) :

$$\boxed{\text{lorsque } f(x) = \sqrt{u(x)}, \text{ on a } f'(x) = u'(x) \times \frac{1}{2\sqrt{u(x)}}.}$$

(4) **Où l'on applique la formule de dérivation composée à un exemple :**
On veut déterminer l'expression de $f'(x)$ pour $f(x) = \sin(\ln(x))$.
On applique la formule de dérivation composée avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(t) = \sin(t)$ et on obtient

$$\boxed{f'(x) = \ln'(x) \times \sin'(\ln(x)) = \frac{\cos(\ln(x))}{x}.}$$

4.2 Exercices

Exercice 1 - opérations algébriques de base

Dériver formellement les expressions ci-dessous (c'est-à-dire sans se préoccuper des questions des domaines de définition ou dérivabilité), en veillant à simplifier les résultats au maximum :

1. $f(x) = x \ln x - x$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ *(à savoir donner rapidement)*
3. $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *(fonction homographique)*
4. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{(x-3)^2}$
5. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$
6. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$
7. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ *(fonction tangente)*
8. $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ *(fonction cotangente)*
9. $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

Exercice 2 - dérivées composées au programme de Terminale

Dériver formellement les expressions ci-dessous, en veillant à simplifier les résultats au maximum :

1. $f(x) = \sin^5 x$
2. $f(x) = \cos^4 x$
3. $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{1 + \cos^2 x}$
4. $f(x) = \sqrt{x^4 - 2x + 3}$
5. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$
6. $f(x) = e^{x^2 - 3x + 4}$
7. $f(x) = e^{\sqrt{x^2 - x + 1}}$
8. $f(x) = \ln(\sin x)$
9. $f(x) = \ln(\cos x)$
10. $f(x) = \ln(e^x + 1)$
11. $f(x) = \ln(\ln x)$
12. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ *(on peut obtenir une expression très simple)*

Exercice 3 - exemples de dérivées composées généralisées

Dériver formellement les expressions ci-dessous (c'est-à-dire sans se préoccuper des questions des domaines de définition ou dérivabilité), en veillant à simplifier les résultats au maximum :

1. $f(x) = \sin(x^2)$
2. $f(x) = \cos(\sqrt{x})$
3. $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
4. $f(x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$

Notation a^b (généralisation de la notion de puissance) :

- pour tous $a \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{R}$, on note $a^b = e^{b \ln a}$
- il s'agit d'une extension de la notion de puissance au cas d'un exposant non nécessairement entier
- la plupart des règles de calcul connues sur les puissances, dans le cas d'exposants entiers, s'étendent dans le cas d'exposants quelconques (démonstrations sans difficulté en utilisant les règles de calcul élémentaires sur ln et exp)

Exercice 4 - pour aller plus loin - dérivée d'une fonction de la forme $x \longmapsto u(x)^{v(x)}$

1. Soients : I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point
   $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et à valeurs strictement positives
   $v : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fontion dérivable sur I

   On peut donc définir la fonction $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\varphi(x) \overset{\text{déf.}}{=} u(x)^{v(x)}$, i.e. $\varphi(x) = e^{v(x) \ln u(x)}$
   Il n'est pas difficile d'établir, en invoquant deux compositions et un produit, que φ est dérivable sur I. Calculer $\varphi'(x)$ en utilisant l'expression de $\varphi(x)$ sous forme exponentielle.
2. Dériver formellement les expressions ci-dessous, en commençant par les réécrire sous forme exponentielle *(réflexe à acquérir en vue de cette année)* :

   (a) $\varphi(x) = x^x$ (b) $\varphi(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ (c) $\varphi(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$