

Corrigé CCINP Modélisation 2021 TSI Étude d'un système Dish-Stirling

Partie I – Moteur Stirling « double effet » de type β

I.1 – Modélisation de la chaîne thermomécanique

Q1. Liaison pivot glissant parfaite : rotation et translation possible selon l'axe (Ox_0)

$$\{\mathcal{T}_{0 \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_0 & M_0 \\ Z_0 & N_0 \end{array} \right\}_{O/\mathcal{R}_0}$$

Q2. Bilan des actions mécaniques exercées sur le déplaceur 1 :

- Torseur de liaison (cf question Q1)
- Poids (négligé)
- Action des forces de pressions exercées par la chambre chaude :

$$\{\mathcal{T}_{c \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} p_c(t)S & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{O/\mathcal{R}_0}$$

- Action des forces de pressions exercées par la chambre froide :

$$\{\mathcal{T}_{c \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} -p_f(t)(S - S_{int}) & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{O/\mathcal{R}_0}$$

- Action des forces de pressions exercées par la chambre B :

$$\{\mathcal{T}_{c \rightarrow 1}\} = \left\{ \begin{array}{cc} -p_b(t)S_{int} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{O/\mathcal{R}_0}$$

Q3. Le théorème de la résultante dynamique, en projection sur l'axe (Ox_0) donne alors :

$$m\ddot{x}_1(t) = p_c(t)S - p_f(t)(S - S_{int}) - p_b(t)S_{int} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Q4. On a conservation de la masse totale de gaz donc à chaque instant $m = m_f + m_c$ (en négligeant la masse dans le régénérateur). En multipliant cette équation par r , il vient : $m.r = m_f r + m_c r$ puis, par application de la loi des gaz parfaits dans chaque chambre, on trouve :

$$m.r = \frac{p_f V_f}{T_f} + \frac{p_c V_c}{T_c} \quad (4) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Q5. On remplace p_c et p_f par p dans l'équation (4) et il vient :

$$m.r = p(t) \left(\frac{V_f}{T_f} + \frac{V_c}{T_c} \right) \iff p(t) = \frac{m.r}{\frac{V_f}{T_f} + \frac{V_c}{T_c}}$$

Q6. En posant $X = \frac{A_1}{A_0}x_1(t) + \frac{A_3}{A_0}x_3(t)$, on a l'équation (6) qui s'écrit $p(t) = \frac{m.r}{A_0}(1 + X)^{-1}$, avec $|X| \ll 1$. On fait donc un développement limité à l'ordre 1 en X et on trouve :

$$p(t) \approx \frac{m.r}{A_0} \left(1 - \frac{A_1}{A_0}x_1(t) - \frac{A_3}{A_0}x_3(t) \right)$$

$$\text{Soit : } p(t) = p^0 - k_1 x_1(t) - k_2 x_3(t) \quad (7) \quad \text{avec : } \boxed{p^0 = \frac{m.r}{A_0}}, \boxed{k_1 = m.r \frac{A_1}{A_0^2}} \text{ et } \boxed{k_2 = m.r \frac{A_3}{A_0^2}}$$

Q7. La loi de Laplace écrite dans la chambre B aboutit à : $p_b(t) = p_b^0 \left(\frac{V_b^0}{V_b(t)} \right)^\gamma$.

Q8. On a $V_b(t) = V_b^0 - S_{int}x_1(t)$ car un déplacement vers la droite ($x_1 > 0$) du déplaceur 1 diminue le volume de la chambre B. En remplaçant dans l'expression trouvée à la question Q7, on trouve alors :

$$p_b(t) = p_b^0 \left(\frac{V_b^0}{V_b^0 - S_{int}x_1(t)} \right)^\gamma$$

Q9. L'équation précédente peut s'écrire : $p_b(t) = p_b^0 \left(1 - \frac{S_{int}}{V_b^0} x_1(t) \right)^{-\gamma}$. En supposant $\left| \frac{S_{int}}{V_b^0} x_1(t) \right| \ll 1$, on peut alors effectuer un développement limité à l'ordre 1 et on trouve :

$$p_b(t) \approx p_b^0 \left(1 - \gamma \frac{S_{int}}{V_b^0} x_1(t) \right) \text{ soit } p_b(t) = p_b^0 - k_3 x_1(t) \quad (9) \quad \text{avec : } k_3 = p_b^0 \gamma \frac{S_{int}}{V_b^0}$$

Q10. Dans le domaine de Laplace, le système d'équation s'écrit :

$$\begin{cases} X_1(p)(p^2 - D_{11}p - K_{11}) = X_3(p)(D_{13}p + K_{13}) & (11') \\ X_3(p)(p^2 - D_{33}p - K_{33}) = 2K_{31}X_1(p) + \frac{1}{m_3}F_{gen}(p) & (12') \end{cases}$$

Q11. Deux des pôles ($p_{1,2}$) sont à partie réelle positive donc le système est instable.

I.2 – Commande du moteur de Stirling « double effet »

Q12. Ce correcteur augmente la stabilité en augmentant la marge de phase. L'action intégrale, quant à elle, augmente la précision.

Q13. Pour la rapidité (en retenant un critère de 95%), on trouve $\approx 0,15$ s. La précision statique est bonne puisque $x_3(t) = x_3^*(t)$ pour $t \rightarrow \infty$. Enfin, le système ne présente un « dépassement » $< 0,75\%$ par rapport à une réponse d'un deuxième ordre apériodique très amorti, et n'apparaît donc pas comme tel. Il n'est *a priori* pas très amorti et présente une très bonne marge de phase, mais une mauvaise marge de gain.

NB. Il aurait été préférable d'identifier la FTBF à un filtre standard (Butterworth, p.e) : les dépassements seraient apparus plus clairement.

Partie II – Étude d'un concentrateur solaire

II.1 – Équation de la surface réfléchissante

Q14. Lois de Snell-Descartes concernant la réflexion :

- Le rayon réfléchi est dans le plan d'incidence.
- L'angle de réflexion est l'opposé de l'angle d'incidence : $\alpha_R = -\alpha_I$.

On a donc $\sin \alpha_R = -\sin \alpha_I$ soit $\sin(\vec{n}, \vec{e}_R) = -\sin(\vec{n}, -\vec{e}_I)$, ce qui peut s'écrire – comme les trois vecteurs sont unitaires et coplanaires : $\vec{n} \wedge \vec{e}_R = -\vec{n} \wedge (-\vec{e}_I)$. On prend alors le produit vectoriel par \vec{n} :

$$\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge \vec{e}_R) = -\vec{n} \wedge (\vec{n} \wedge (-\vec{e}_I)) \iff (\vec{n} \cdot \vec{e}_R)\vec{n} - (\vec{n} \cdot \vec{n})\vec{e}_R = -((\vec{n} \cdot (-\vec{e}_I))\vec{n} - (\vec{n} \cdot \vec{n})(-\vec{e}_I)) \iff (\vec{n} \cdot \vec{e}_R)\vec{n} - \vec{e}_R = -(\vec{n} \cdot (-\vec{e}_I))\vec{n} - \vec{e}_I$$

Or $\vec{n} \cdot \vec{e}_r = \cos \alpha_r$ et $\vec{n} \cdot (-\vec{e}_I) = \cos \alpha_I$. Comme $\alpha_I = -\alpha_r$ ces deux cosinus sont égaux. En outre $\vec{n} \cdot (-\vec{e}_I) = -(\vec{n} \cdot \vec{e}_I)$ soit finalement $\vec{n} \cdot \vec{e}_R = \vec{n} \cdot (-\vec{e}_I) = -\vec{e}_I \cdot \vec{n}$. En remplaçant dans la relation précédente, on a :

$$-(\vec{e}_I \cdot \vec{n})\vec{n} - \vec{e}_R = (\vec{e}_I \cdot \vec{n})\vec{n} - \vec{e}_I \iff \vec{e}_R = \vec{e}_I - 2(\vec{e}_I \cdot \vec{n})\vec{n} \quad (13) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Q15.

a) On a $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$ d'une part, et $\vec{e}_r = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ et $\vec{e}_\theta = -\sin \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$ d'autre part.

b) On a :

$$\frac{\partial G}{\partial \theta}(r, \theta, z) = \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta}(r, \theta, z) = \frac{\partial G}{\partial x}(-r \sin \theta) + \frac{\partial G}{\partial y}(r \cos \theta) + \frac{\partial G}{\partial z} \times 0 = r \begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{vmatrix} \iff \boxed{\frac{\partial G}{\partial \theta}(r, \theta, z) = r \vec{\nabla} G \cdot \vec{e}_\theta}$$

c) D'après l'équation (13), on a (lorsque $\vec{e}_I \cdot \vec{n} \neq 0$), $\vec{n} = \frac{1}{2(\vec{e}_I \cdot \vec{n})}(\vec{e}_I - \vec{e}_R)$ avec \vec{e}_I colinéaire à \vec{e}_z et \vec{e}_R colinéaire à $\vec{FM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ combinaison linéaire de \vec{e}_r et \vec{e}_z . Donc au final \vec{n} est dans le plan $(F, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$ et ainsi \vec{n} est orthogonal à \vec{e}_θ .

Puis si $M(x, y, z)$ est un point régulier de la surface \mathcal{S}_G d'équation cartésienne $G(x, y, z) = 0$ alors $\nabla G(x, y, z)$ est un vecteur normal au plan tangent à la surface en M , donc \vec{n} est colinéaire à $\nabla G(x, y, z)$ et \vec{n} est orthogonal à \vec{e}_θ d'où $\nabla G \cdot \vec{e}_\theta = 0$ et d'après **Q15. b)**, $\frac{\partial G}{\partial \theta}(r, \theta, z) = 0$.

On en déduit que G ne dépend pas de θ : ainsi si un point M est sur \mathcal{S}_G , tout le cercle passant par M dans le plan orthogonal à \vec{e}_z et centré sur l'axe (F, \vec{e}_z) est dans \mathcal{S}_G .

Donc $\boxed{\mathcal{S}_G \text{ est une surface de révolution d'axe } (F, \vec{e}_z)}$. (Notion HORS PROGRAMME)

Q16. On calcule $\frac{d\vec{FM}}{dr}$:

$$\frac{d\vec{FM}}{dr} = \frac{d}{dr}(r\vec{e}_r + g\vec{e}_z) = \vec{e}_r + g'\vec{e}_z \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{t} = \frac{1}{\sqrt{1+g'^2}}\vec{e}_r + \frac{g'}{\sqrt{1+g'^2}}\vec{e}_z}$$

On peut alors calculer $\vec{n} = \vec{t} \wedge \vec{e}_\theta$:

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{1+g'^2}}\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta + \frac{g'}{\sqrt{1+g'^2}}\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\theta = \frac{1}{\sqrt{1+g'^2}}\vec{e}_z + \frac{g'}{\sqrt{1+g'^2}}(-\vec{e}_r) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Q17.

a) MF est le rayon réfléchi par la surface \mathcal{S}_G . Il satisfait donc les lois de Descartes de la réflexion et la relation (13). Ici,

$$\vec{e}_I = \vec{e}_z \text{ et } \vec{e}_R = \frac{\vec{FM}}{\|\vec{FM}\|}. \text{ On a donc bien } \boxed{\frac{\vec{FM}}{\|\vec{FM}\|} = \vec{e}_z - 2(\vec{e}_z \cdot \vec{n})\vec{n}}.$$

b) On a :

$$\vec{e}_z - 2(\vec{e}_z \cdot \vec{n})\vec{n} = \vec{e}_z - \frac{2}{\sqrt{1+g'^2}}\vec{n} \iff \boxed{\vec{e}_z - 2(\vec{e}_z \cdot \vec{n})\vec{n} = \frac{2g'}{1+g'^2}\vec{e}_r + \frac{g'^2-1}{1+g'^2}\vec{e}_z}$$

$$\text{c) } \boxed{\frac{\vec{FM}}{\|\vec{FM}\|} = \frac{r}{\sqrt{r^2+g^2}}\vec{e}_r + \frac{g}{\sqrt{r^2+g^2}}\vec{e}_z}.$$

d) En identifiant les deux expressions précédentes, on trouve que :

$$\begin{cases} \frac{2g'}{1+g'^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2+g^2}} & (A) \\ \frac{g'^2-1}{1+g'^2} = \frac{g}{\sqrt{r^2+g^2}} & (B) \end{cases}$$

D'après (A), comme $r \in \mathbb{R}^+$, on en déduit que $\boxed{g' > 0}$ et on tire $\frac{1}{\sqrt{r^2+g^2}} = \frac{2g'}{r(1+g'^2)}$. En réinjectant dans (B), il vient alors :

$$\frac{g'^2-1}{1+g'^2} = g \frac{2g'}{r(1+g'^2)} \iff g'^2-1 = g \frac{2g'}{r} \iff \boxed{g'^2 - 2\frac{g}{r}g' - 1 = 0} (\forall r \in \mathbb{R}^+) \quad \text{C.Q.F.D.}$$

Q18.

a) On résout $X^2 - 2\frac{g}{r}X - 1 = 0$. Le discriminant vaut : $\Delta = 4\frac{g^2}{r^2} + 4 > 0$. Les solutions sont donc : $X_{1,2} = \frac{2\frac{g}{r} \pm \sqrt{4\frac{g^2}{r^2} + 4}}{2}$.
 On sait qu'on recherche une solution positive car on a montré que $g' > 0$. La seule solution acceptable est donc :

$$X = \frac{g}{r} + \sqrt{\frac{g^2}{r^2} + 1}$$

b) On a donc immédiatement $g' = \frac{g}{r} + \sqrt{\frac{g^2}{r^2} + 1}$.

c) On pose $h = \frac{g}{r}$ soit $h' = \frac{rg' - g}{r^2} = \frac{g'}{r} - \frac{h}{r}$. L'équation précédente s'écrit : $g' = h + \sqrt{1 + h^2}$. On peut alors réinjecter dans l'expression de h' :

$$h' = \frac{h + \sqrt{1 + h^2}}{r} - \frac{h}{r} = \frac{\sqrt{1 + h^2}}{r} \iff \frac{h'}{\sqrt{1 + h^2}} = \frac{1}{r} \text{ C.Q.F.D.}$$

Q19.

a) Soit $h_k = \frac{kr}{2} - \frac{1}{2kr}$, alors $h'_k = \frac{k}{2} + \frac{1}{2kr^2}$. Si $\frac{h'}{\sqrt{1+h^2}} = \frac{1}{r}$ sur \mathbb{R}_+^* , alors $(rh')^2 = 1 + h^2$.

On a donc :

$$\frac{h'_k}{\sqrt{1 + h_k^2}} = \frac{\frac{k}{2} + \frac{1}{2kr^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{kr}{2} - \frac{1}{2kr}\right)^2}} = \frac{\frac{k}{2} + \frac{1}{2kr^2}}{\sqrt{1 + \frac{k^2r^2}{4} + \frac{1}{4k^2r^2} - \frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{r} \left(\frac{kr}{2} + \frac{1}{2kr}\right)}{\sqrt{\left(\frac{kr}{2} + \frac{1}{2kr}\right)^2}} = \frac{1}{r}$$

Donc la fonction $r \mapsto \frac{kr}{2} - \frac{1}{2kr}$ est bien solution sur \mathbb{R}_+^* de l'équation (15) $\forall k \in \mathbb{R}_+^*$.

b) Les primitives sur \mathbb{R}_+^* de $r \mapsto \frac{1}{r}$ sont $r \mapsto \ln(r) + C$, $\forall C \in \mathbb{R}$.

c) On a $Y + \sqrt{1 + Y^2} = A \iff_{A-Y \geq 0} 1 + Y^2 = (A - Y)^2 = A^2 - 2AY + Y^2 \iff 1 = A^2 - 2AY \iff_{A > 0} Y = \frac{A^2 - 1}{2A}$.

On vérifie que $A - Y \geq 0$, en effet $A - Y = A - \frac{A^2 - 1}{2A} = \frac{A^2 + 1}{2A} \geq 0$.

d) On a $H' = \frac{h' + \frac{hh'}{\sqrt{1+h^2}}}{h + \sqrt{1+h^2}} = \frac{h'(\sqrt{1+h^2} + h)}{h + \sqrt{1+h^2}}$ d'où $H' = \frac{h'}{\sqrt{1+h^2}}$.

e) Ainsi $H' = \frac{h'}{\sqrt{1+h^2}} = \frac{1}{r}$ d'après l'équation (15). Puis d'après **Q19. b)** :

$$\text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } H(r) = \ln(h + \sqrt{1 + h^2}) = \ln(r) + \lambda$$

f) On obtient alors $h + \sqrt{1 + h^2} = e^\lambda r = Cr$ avec $C = e^\lambda > 0$.

Enfin d'après **Q19. c)** : $h = \frac{C^2r^2 - 1}{2Cr}$ est la forme des solutions de (15).

Q20. On trouve alors que $g(r) = rh(r) = \frac{C^2r^2 - 1}{2C}$.

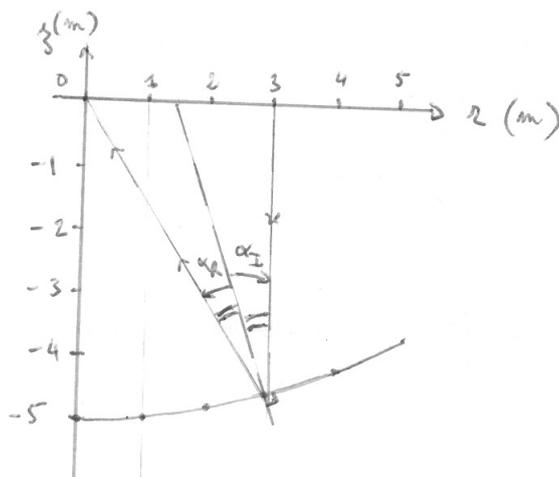
En considérant le point $M(0)$, on doit avoir $g(0) = -f \iff -\frac{1}{2C} = -f \iff C = \frac{1}{2f}$.

En remplaçant, on obtient $g(r) = \frac{r^2}{4f} - f$.

Q21. On a le tableau de valeur suivant :

r (m)	0	1	2	3	4	5
z (m)	-5,0	$-\frac{99}{20} \approx -5,0$	$-\frac{96}{20} = -4,8$	$\frac{91}{20} \approx -4,6$	$\frac{84}{20} = -4,2$	$-\frac{75}{20} = -3,8$

On sait que le rayon lumineux arrivant parallèlement à (Oz) se réfléchit sur la surface en passant par F, origine du repère. La normale est alors la bissectrice de l'angle ainsi formé.



II.2 – Caractérisation de l’image du soleil

Q22.

a) On a : $z = -\rho \cos \varphi$ et $r = \rho \sin \varphi$.

b) On sait que $z = \frac{r^2}{4f} - f$. En remplaçant, il vient :

$$-\rho \cos \varphi = \frac{1}{4f} \rho^2 \sin^2 \varphi - f \iff \boxed{\rho^2 \frac{\sin^2 \varphi}{4f} + \rho \cos \varphi - f = 0} \text{ C.Q.F.D.}$$

c) Le discriminant de cette équation en ρ vaut $\Delta = \cos^2 \varphi + 4f \frac{\sin^2 \varphi}{4f} = 1$. On en déduit les solutions :

$$\rho = \frac{-\cos \varphi \pm 1}{2 \frac{\sin^2 \varphi}{4f}} \text{ or } \rho > 0 \implies \rho(\varphi) = 2f \frac{1 - \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = 2f \frac{1 - \cos \varphi}{1 - \cos^2 \varphi} = 2f \frac{1 - \cos \varphi}{(1 - \cos \varphi)(1 + \cos \varphi)}$$

Comme $\varphi \in [0; \pi[$, on retrouve bien l’équation (17) : $\boxed{\rho(\varphi) = \frac{2f}{1 + \cos \varphi}}$.

Q23.

Comme $\overrightarrow{FM} = r\vec{e}_r + g(r)\vec{e}_z = \rho\vec{e}_\varphi$, on a $f\vec{e}_{r_m} + g(f)\vec{e}_z = \rho_m\vec{e}_{\varphi_m}$ avec $z_m = g(f) = \frac{f}{4} - f = -\frac{3}{4}f$,
d’où $\rho_m^2 = f^2 + g(f)^2 = f^2 + \frac{9}{16}f^2 = \frac{25}{16}f^2$ donc $\boxed{\rho_m = \frac{5}{4}f}$ puis $\cos \varphi_m = -\frac{z_m}{\rho_m} = -\frac{g(f)}{\rho_m} \implies \boxed{\cos \varphi_m = \frac{3}{5}}$

enfin $\sin \varphi_m = \frac{r_m}{\rho_m} = \frac{f}{\rho_m} \implies \boxed{\sin \varphi_m = \frac{4}{5}}$ et $\boxed{\tan \varphi_m = \frac{\sin \varphi_m}{\cos \varphi_m} = \frac{4}{3}}$

Q24.

a) On a :

$$\left(\overrightarrow{MP} \cdot \vec{e}_\varphi\right)^2 = \left(\|\overrightarrow{MP}\| \cdot \|\vec{e}_\varphi\| \cos\left(\overrightarrow{MP}; \vec{e}_\varphi\right)\right)^2 = \left(\|\overrightarrow{MP}\| \cdot 1 \cdot \cos \alpha_0\right)^2 \iff \boxed{\left(\overrightarrow{MP} \cdot \vec{e}_\varphi\right)^2 = \|\overrightarrow{MP}\|^2 \cos^2 \alpha_0}$$

b) On peut écrire \overrightarrow{FM} sous la forme : $\overrightarrow{FM} = \rho \sin \varphi \vec{e}_r - \rho \cos \varphi \vec{e}_z$ d’où on déduit l’expression de \overrightarrow{MP} :

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{FP} = \overrightarrow{FP} - \overrightarrow{FM} = (X - \rho \sin \varphi)\vec{e}_r + Y\vec{e}_\theta + \rho \cos \varphi \vec{e}_z$$

Le produit scalaire s’écrit alors :

$$\overrightarrow{MP} \cdot \vec{e}_\varphi = \begin{vmatrix} X - \rho \sin \varphi \\ Y \\ \rho \cos \varphi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \sin \varphi \\ 0 \\ -\cos \varphi \end{vmatrix} = X \sin \varphi - \rho \sin^2 \varphi - \rho \cos^2 \varphi = X \sin \varphi - \rho$$

On trouve bien finalement : $\boxed{\left(\overrightarrow{MP} \cdot \vec{e}_\varphi\right)^2 = (X \sin \varphi - \rho)^2}$.

c) En utilisant l'expression de \vec{MP} , il vient :

$$\|\vec{MP}\|^2 = (X - \rho \sin \varphi)^2 + Y^2 + \rho^2 \cos^2 = X^2 - 2\rho X \sin \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi + Y^2 + \rho^2 \cos^2$$

$$\boxed{\|\vec{MP}\|^2 = X^2 - 2\rho X \sin \varphi + Y^2 + \rho^2} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

d) On identifie les deux expressions de $(\vec{MP} \cdot \vec{e}_\varphi)^2$ obtenues précédemment, et on remplace $\|\vec{MP}\|$ par son expression. On trouve :

$$\begin{aligned} (X \sin \varphi - \rho)^2 &= (X^2 - 2\rho X \sin \varphi + Y^2 + \rho^2) \cos^2 \alpha_0 \\ X^2 \sin^2 \varphi - 2\rho X \sin \varphi + \rho^2 &= (X^2 - 2\rho X \sin \varphi + Y^2 + \rho^2) \cos^2 \alpha_0 \\ X^2 (\sin^2 \varphi - \cos^2 \alpha_0) - 2\rho X \sin \varphi \sin^2 \alpha_0 + \rho^2 \sin^2 \alpha_0 &= Y^2 \cos^2 \alpha_0 \end{aligned}$$

II.3 – Performances du concentrateur

Q25. $I = \int_0^{\tilde{a}} Y(X) dX$ est l'aire sous l'arc de courbe de la figure 11. On aura donc $\tilde{A}_\varphi = 4I$. On remarque par ailleurs que $\frac{X^2}{\tilde{a}^2} + \frac{Y^2}{\tilde{b}^2} = 1$ (c'est l'équation d'une ellipse droite de centre O). Calculons $I = \int_0^{\tilde{a}} Y(X).dX = \int_0^{\tilde{a}} \sqrt{\tilde{b}^2 - \frac{\tilde{b}^2}{\tilde{a}^2} X^2}.dX$. On utilise le changement de variable $X = \tilde{a} \cos t \iff t = \arccos \frac{X}{\tilde{a}}$ avec $dX = -\tilde{a} \sin t dt$, on obtient :

$$I = \tilde{b} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1 - \cos^2 t} (-\tilde{a} \sin t . dt) = \tilde{a}\tilde{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t . dt = \tilde{a}\tilde{b} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2t)}{2} . dt$$

$$I = \tilde{a}\tilde{b} \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \tilde{a}\tilde{b} \left(\frac{\pi}{4} - 0 - \frac{\sin(\pi) + \sin(0)}{4} \right) \quad \text{soit finalement : } \boxed{I = \frac{\pi \tilde{a}\tilde{b}}{4}} \quad \text{et donc : } \boxed{\tilde{A}_\varphi = \pi \tilde{a}\tilde{b}}$$

Q26.

a) On sait que $\vec{e}_\varphi = \sin \varphi \vec{e}_r - \cos \varphi \vec{e}_z$. En dérivant, il vient :

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = \cos \varphi \vec{e}_r + \sin \varphi \vec{e}_z \implies \left\| \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} \right\| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1$$

$\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}$ est donc bien un vecteur unitaire.

$$\vec{e}_\varphi \cdot \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = \begin{vmatrix} \sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & 0 \\ -\cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} = \sin \varphi \cos \varphi + 0 - \cos \varphi \sin \varphi \iff \boxed{\vec{e}_\varphi \cdot \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = 0} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

b) ds est défini par $ds = \left\| \frac{d\vec{FM}}{d\varphi} \right\| d\varphi$. Or $\frac{d\vec{FM}}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} (\rho(\varphi) \vec{e}_\varphi) = \frac{d\rho}{d\varphi} \vec{e}_\varphi + \rho(\varphi) \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = \rho' \vec{e}_\varphi + \rho \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}$.

Et $(\vec{e}_\varphi, \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi})$ est une base orthonormée, d'où $\left\| \frac{d\vec{FM}}{d\varphi} \right\| = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}$ et ainsi $\boxed{ds = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} . d\varphi}$.

c) On sait que $\rho = \frac{2f}{1 + \cos \varphi}$. On dérive :

$$\rho' = 2f \frac{\sin \varphi}{(1 + \cos \varphi)^2} = \rho \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi} = \rho \frac{2 \sin \varphi / 2 \cos \varphi / 2}{2 \cos^2 \varphi / 2} = \rho \tan \frac{\varphi}{2}$$

On a bien : $\boxed{\rho' = \rho \tan \frac{\varphi}{2}}$

d) On remplace alors dans l'expression de dP :

$$dP = 2\pi\eta p_0 \frac{\tilde{A}_0}{\tilde{A}_\varphi} \cos \frac{\varphi}{2} . r . \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} . d\varphi = 2\pi\eta p_0 \frac{\tilde{A}_0}{\tilde{A}_\varphi} \cos \frac{\varphi}{2} . \rho \sqrt{1 + \tan^2 \frac{\varphi}{2}} . d\varphi = 2\pi\eta p_0 \frac{\tilde{A}_0}{\tilde{A}_\varphi} \cos \frac{\varphi}{2} . \rho \frac{1}{|\cos \frac{\varphi}{2}|} . d\varphi$$

$\varphi \in [0; \pi]$ donc $\frac{\varphi}{2} \in [0; \frac{\pi}{2}]$ et $\cos \frac{\varphi}{2} > 0$.

$$dP = 2\pi\eta p_0 \frac{\tilde{A}_0}{\tilde{A}_\varphi} r . \rho . d\varphi = 2\pi\eta p_0 \frac{\tilde{A}_0}{\tilde{A}_\varphi} \rho^2 \sin \varphi . d\varphi = 2\pi\eta p_0 \frac{\pi \tilde{a}(0) \tilde{b}(0)}{\pi \tilde{a}(\varphi) \tilde{b}(\varphi)} \rho^2 \sin \varphi . d\varphi$$

$$dP = 2\pi\eta p_0 \frac{\rho^2(0) \tan^2 \alpha_0}{\frac{\rho^2(\varphi)}{\cos \varphi} \tan^2 \alpha_0} \rho^2 \sin \varphi . d\varphi = 2\pi\eta p_0 \frac{f^2}{\cos \varphi} \rho^2 \sin \varphi . d\varphi \iff \boxed{dP = 2\pi\eta p_0 f^2 \cos \varphi \sin \varphi . d\varphi} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

e) Pour déterminer la puissance totale, il suffit d'intégrer l'expression précédente pour φ variant de 0 à φ_m :

$$P = \int_0^{\varphi_m} 2\pi\eta p_0 f^2 \cos \varphi \sin \varphi \cdot d\varphi = 2\pi\eta p_0 f^2 \int_0^{\varphi_m} \cos \varphi \sin \varphi \cdot d\varphi = \pi\eta p_0 f^2 \int_0^{\varphi_m} \sin(2\varphi) \cdot d\varphi$$

$$P = \frac{\pi\eta p_0 f^2}{2} (1 - \cos(2\varphi_m))$$

f) Application numérique : $P = \frac{3,14 \times 0,7 \times 10^3 \times 25}{2} (1 - \cos(2\varphi_m))$. Or on a $\cos(2\varphi_m) = 1 - 2\sin^2(\varphi_m) \Rightarrow 1 - \cos(2\varphi_m) = 2\sin^2(\varphi_m) = 2 \times \frac{16}{25} = \frac{32}{25}$ d'où : $P = 3,14 \times 0,7 \times 16 \times 10^3$, l'application numérique donne $P \approx 35 \text{ kW}$.

Corrigé proposé par l'équipe pédagogique TSI-2 Pau Marc Aguetand, Stéphane Lamballe, Olivier Pélardy, Nicolas Renaud

Pour toute erreur et/ou remarque : stephane.lamballe@neuf.fr