

Q 1. ▷ Les centrales nucléaires terrestres nécessitent une source froide qui est en pratique réalisée par un fleuve ou par la mer.

▷ Or il n'y a **pas d'eau à l'état liquide sur Mars** ; la technologie terrestre n'est donc pas directement transposable.

Q 2. Par définition $P_v = \frac{P}{V_U}$ avec V_U le volume d'uranium. Comme $V_U = \frac{m}{\rho}$ on obtient $P_v = \frac{P\rho}{m} \simeq 2,7 \cdot 10^6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$

Q 3. On note Σ le système proposé par l'énoncé. On a alors :

▷ $dH = H(t+dt) - H(t)$: **variation d'enthalpie** de Σ entre t et $t+dt$

▷ $\Phi(r)dt$: **énergie rentrant** dans Σ entre t et $t+dt$

▷ $\Phi(r+dr)dt$: **énergie sortant** de Σ entre t et $t+dt$

▷ $P_v 2\pi r h dr dt = P_v dV dt$: **énergie produite** dans Σ par les réactions nucléaires entre t et $t+dt$. En effet le volume de Σ est $dV = 2\pi r h dr$ (à l'ordre 1 en dr).

Q 4. $dH = \Phi(r)dt - \Phi(r+dr)dt + P_v 2\pi r h dr dt$ notée (1).

▷ $\frac{(1)}{dt} : \frac{dH}{dt} = \Phi(r) - \Phi(r+dr) + P_v 2\pi r h dr$ avec $\frac{dH}{dt} = 0$ car on est en **régime stationnaire**.

▷ Puis en divisant par dr : $0 = \underbrace{\frac{\Phi(r) - \Phi(r+dr)}{dr}}_{-\frac{d\Phi}{dr}} + P_v 2\pi r h$ (par définition de la dérivée).

▷ On a donc bien $\frac{d\Phi}{dr} = 2\pi h P_v r$: (2)

Q 5. On primitive (2) : $\Phi(r) = 2\pi h P_v \frac{r^2}{2} + A$ avec A une constante.

Q 6. Loi de Fourier : $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{Grad}} T$ avec $\vec{j}_{th}$ le vecteur densité de courant thermique (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$), λ la conductivité thermique (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) et T la température (en K).

Q 7. ▷ Par définition du flux thermique sortant $\Phi(r) = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S}$ où l'intégrale est réalisée sur la surface latérale du cylindre de rayon r et d'axe (Oz) (l'axe de révolution du système).

▷ Or dans ce problème $T(r)$ (T ne dépend que de r) grâce aux invariances de translation et de rotation autour de l'axe de révolution. La loi de Fourier s'écrit donc $\vec{j}_{th} = -\lambda \overrightarrow{\text{Grad}} T = -\lambda \frac{dT}{dr} \vec{e}_r$

Comme $d\vec{S} = dS \vec{e}_r$, on calcule $\Phi(r) = \iint_S \vec{j}_{th} \cdot d\vec{S} = -\lambda \iint_S \frac{dT}{dr} dS$.

▷ Enfin comme r est constant sur la surface d'intégration, et que $\frac{dT}{dr}$ est une fonction ne dépendant que de r , on

obtient : $\Phi(r) = -\lambda \iint_S \frac{dT}{dr} dS = -\lambda \frac{dT}{dr} \iint_S dS = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi h r$

Q 8. D'après les questions **Q 5.** et **Q 7.** : $\Phi(r) = 2\pi h P_v \frac{r^2}{2} + A = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi h r$

D'où, $\frac{dT}{dr} = -\frac{P_v r}{2\lambda} - \frac{A}{\lambda 2\pi h r}$ qui en primitivant donne bien la relation attendue : $T(r) = -\frac{A}{\lambda 2\pi h} \ln r - \frac{P_v}{4\lambda} r^2 + B$

Q 9. ▷ Procédons à un bilan d'enthalpique entre t et $t+dt$ sur le système $\Sigma' = \{\text{Cylindre de hauteur } h \text{ et de rayon } R_1\}$: $H_{\Sigma'}(t+dt) = H_{\Sigma'}(t) - \Phi(R_1)dt$ (il n'y a pas de production d'énergie par réactions nucléaires dans la zone $r \leq R_1$).

▷ En régime permanent $H_{\Sigma'}(t+dt) = H_{\Sigma'}(t)$ et donc nécessairement $\Phi(R_1) = 0$

▷ Reprenons alors l'expression de la **Q 5.** avec la condition $\Phi(R_1) = 0$: $\Phi(R_1) = 2\pi h P_v \frac{R_1^2}{2} + A = 0 \Rightarrow$ $A = -P_v \pi R_1^2 h$

Q 10. D'après les deux questions précédentes, $T(r) = -\frac{A}{\lambda 2\pi h} \ln r - \frac{P_v}{4\lambda} r^2 + B = \frac{P_v R_1^2}{2\lambda} \ln r - \frac{P_v}{4\lambda} r^2 + B$

▷ On détermine la constante B en écrivant $T(R_2) = \frac{P_v R_1^2}{2\lambda} \ln R_2 - \frac{P_v}{4\lambda} R_2^2 + B \Rightarrow B = T(R_2) - \frac{P_v R_1^2}{2\lambda} \ln R_2 + \frac{P_v}{4\lambda} R_2^2$

Le profil de température est donc donné par $T(r) = T(R_2) - \frac{P_v R_1^2}{2\lambda} \ln \frac{R_2}{r} + \frac{P_v}{4\lambda} (R_2^2 - r^2)$

D'où
$$T(R_1) = T(r = R_1) = T(R_2) - \frac{P_v R_1^2}{2\lambda} \ln \frac{R_2}{R_1} + \frac{P_v}{4\lambda} (R_2^2 - R_1^2)$$

Q 11. L'application numérique donne $T(R_1) \simeq 1200^\circ\text{C}$

Q 12. ▷ Comme il n'y a **pas de création ou de perte d'énergie thermique** dans le carbure de bore, on a **conservation du flux thermique Φ** (il est demandé "sans calcul" donc on répond sans calcul¹).

▷ Le **flux thermique Φ** est donc **nul en tout point du carbure de bore** (puisque d'après la **Q 9**, $\Phi(R_1) = 0$).

▷ On a donc immédiatement $\vec{j}_{\text{th}} = \vec{0}$ ce qui est associé à une **température uniforme**.

Q 13. ▷ Si on suppose le contact thermique parfait entre l'uranium et la carbure de bore, la température du carbure de bore vaut $T_{\text{B}_4\text{C}} = T(r \leq R_1) = T(R_1) = 1200^\circ\text{C}$.

▷ Le **carbure de bore reste à l'état solide** puisque $T_{\text{B}_4\text{C}} < T_{\text{fus}, \text{B}_4\text{C}}$. La modélisation thermique proposée ici qui est basée sur la **conduction thermique** semble donc **adaptée** puisque dans un **solide opaque**, il n'y a **ni convection ni rayonnement**.

Cependant, la modélisation repose sur la loi de Fourier qui est une loi phénoménologique qui ne décrit pas rigoureusement les processus microscopiques d'échange thermique.

Q 14. ▷ Il y a $m_{235\text{U}} = 0,2 \times m = 5,6 \text{ kg}$ d'**uranium 235** dans le système.

▷ Cela correspond à une quantité de matière de $n_{235\text{U}} = \frac{m_{235\text{U}}}{M_{235\text{U}}} \simeq 24 \text{ mol}$ et donc à un **nombre d'atomes d'uranium**

235 de $N_{235\text{U}} = n_{235\text{U}} \times N_A \simeq 1,4 \cdot 10^{25}$

▷ L'énergie que peut libérer cette quantité d'**uranium 235** est donc de :

$$E = N_{235\text{U}} \times 200 \text{ MeV} = \frac{0,2m}{M_{235\text{U}}} \times N_A \times 200 \text{ MeV} \simeq 4,6 \cdot 10^{14} \text{ J}$$

▷ Si le réacteur délivre la puissance constante de $P \simeq 4 \text{ kW}$, la durée de vie du réacteur sera donc de :

$$\Delta t = \frac{E}{P} \simeq 1,1 \cdot 10^{11} \text{ s} \simeq 3600 \text{ années}$$
 ce qui est largement suffisant pour la durée de la mission !

▷ Cette durée de vie qui est très grande (au regard de la masse d'uranium de seulement 28 kg) illustre l'**énergie colossale** que peuvent libérer les **réactions nucléaires en comparaison aux réactions chimiques**.

Remarque : en effet, $E_{\text{nucléaire, molaire}} \sim \frac{4,6 \cdot 10^{14} \text{ J}}{24 \text{ mol}} \sim 10^{10} \text{ kJ/mol} \gg E_{\text{chimique, molaire}} \sim 10^3 \text{ kJ/mol}$ (ordre de grandeur de $-\Delta_r H^\circ$).

On peut cependant se demander l'intérêt de prévoir un réacteur avec une telle durée de vie alors que les missions ne doivent durer que quelques années... peut-être est-ce pour ne pas avoir à renvoyer un réacteur à chaque mission.

Un réacteur envoyé sur Mars sera opérationnel pendant fort longtemps !

Q 15. 11 protons, 12 neutrons et 11 électrons

Q 16. D'après le principe d'exclusion de Pauli, la règle de Hund et la règle de Klechkowski on a $\text{Na} : 1s^2 2s^2 2p^6 3s^1$

Q 17. La configuration de valence du sodium est en $3s^1$.

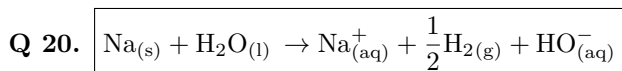
Le sodium se situe donc à la **3^{ème} ligne** (car $n_{\text{max}} = 3$) et à la **1^{ère} colonne** (car configuration de valence en $3s^1$).

Q 18. ▷ Le sodium est **un métal alcalin** car il est situé à la 1^{ère} colonne du tableau périodique.

▷ Les métaux alcalins étant des métaux ils sont de « bons » **conducteurs électriques** et **thermiques** (propriétés physiques).

▷ Les alcalins possédant un seul électron de valence, ils vont céder facilement cet électron. Ce sont donc de **très forts réducteurs** (propriété chimique).

Q 19. Afin d'avoir la configuration électronique du néon ($\text{Ne} : 1s^2 2s^2 2p^6$) le sodium va perdre un électron pour former Na^+



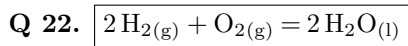
Q 21. ▷ D'après la loi de Hess appliquée à la réaction précédente :

$$\Delta_r H^\circ = \Delta_f H^\circ(\text{Na}_{(aq)}^+) + \frac{1}{2}\Delta_f H^\circ(\text{H}_{2(g)}) + \Delta_f H^\circ(\text{HO}_{(aq)}^-) - \Delta_f H^\circ(\text{Na}_{(s)}) - \Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}_{(l)}) = -183,8 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

▷ En effet, $\Delta_f H^\circ(\text{Na}_{(s)}) = \Delta_f H^\circ(\text{H}_{2(g)}) = 0$ car ce sont des **corps simples** dans leur **état standard de référence**.

▷ $\Delta_r H^\circ < 0$ donc cette réaction est **exothermique** (elle libère de l'énergie thermique).

1. Par le calcul il suffirait de faire un bilan enthalpique sur une couronne cylindrique $[r, r + dr]$ située dans la zone $r \leq R_1$.



Q 23. Dans cette question on travaille avec les activités sans préciser leur expression ; cela permet d'alléger les notations pour aboutir au résultat plus rapidement. Dans la même optique, on omet la notation " $a_{\text{éq}}$ " (pour activité à l'équilibre).

▷ La constante d'équilibre de la réaction précédente s'exprime en fonction des **activités à l'équilibre** :

$$K^\circ = \frac{a^2(\text{H}_2\text{O})}{a^2(\text{H}_2) \times a(\text{O}_2)}$$

▷ Écrivons les deux demi-équations d'oxydoréduction et les deux formules de Nernst associées :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{O}_{2(\text{g})} + 4\text{H}^+_{(\text{aq})} + 4\text{e}^- = 2\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})} : E_1 = E^\circ(\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}) + \frac{RT}{4\mathcal{F}} \ln 10 \times \log \left(\frac{a(\text{O}_2) \times a^4(\text{H}^+)}{a^2(\text{H}_2\text{O})} \right) \quad (1) \\ 2\text{H}^+_{(\text{aq})} + 2\text{e}^- = \text{H}_{2(\text{g})} : E_2 = E^\circ(\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}/\text{H}_{2(\text{g})}) + \frac{RT}{2\mathcal{F}} \ln 10 \times \log \left(\frac{a^2(\text{H}^+)}{a(\text{H}_2)} \right) \quad (2) \end{array} \right.$$

▷ On écrit l'**unicité du potentiel rédox à l'équilibre** (et à température ambiante on sait que $\frac{RT}{\mathcal{F}} \ln 10 \simeq 0,06 \text{ V}$) :

$$E_1 = E_2 \iff E^\circ(\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}) + \frac{0,06}{4} \log \left(\frac{a(\text{O}_2) \times a^4(\text{H}^+)}{a^2(\text{H}_2\text{O})} \right) = E^\circ(\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}/\text{H}_{2(\text{g})}) + \frac{0,06}{2} \log \left(\frac{a^2(\text{H}^+)}{a(\text{H}_2)} \right)$$

$$\text{D'où } E^\circ(\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}) - E^\circ(\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}/\text{H}_{2(\text{g})}) = \frac{0,06}{4} \log \left(\frac{a^2(\text{H}_2\text{O})}{a^2(\text{H}_2) \times a(\text{O}_2)} \right) = \frac{0,06}{4} \log K^\circ$$

▷ Finalement, $K^\circ = 10^{\frac{4}{0,06} E^\circ(\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}) - E^\circ(\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}/\text{H}_{2(\text{g})})} \simeq 10^{82}$

Remarque : $K^\circ \gg 10^4$ (facteur 10^{78}) ; donc cette **réaction est totale**.

Q 24. ▷ On calcule $\Delta_r H^\circ = 2\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}) - 2\Delta_f H^\circ(\text{H}_{2(\text{g})}) - \Delta_f H^\circ(\text{O}_{2(\text{g})}) = 2\Delta_f H^\circ(\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}) = -571,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$ grâce à la loi de Hess et car $\Delta_f H^\circ(\text{O}_{2(\text{g})}) = \Delta_f H^\circ(\text{H}_{2(\text{g})}) = 0$ (corps simples dans leur état standard de référence).

Remarque : cette valeur a été calculée à 293 K mais grâce à l'approximation d'Ellingham elle est valable pour les autres températures tant qu'il n'y a pas de changement d'état.

▷ Ainsi $\Delta_r H^\circ < 0$ donc $\frac{d \ln K^\circ}{dT} = \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2} < 0$ donc **$\ln K^\circ$ décroît si T augmente**. $\ln$ étant croissante on en déduit que **K° décroît si T augmente** (cohérent avec la loi de modération de Le Châtelier : une augmentation isobare de T déplace l'équilibre dans le sens endothermique, c'est-à-dire dans le sens indirect ici, et donc K° diminue).

Q 25. ▷ On dénombre $8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} = 4$ ions O^{2-} et $8 \times 1 = 8$ ions Na^+ par maille.

▷ Le solide ionique est donc $\text{Na}_2\text{O}_{(\text{s})}$. Ceci est cohérent avec l'**électroneutralité du cristal à l'échelle de la maille**.

Q 26. On retrouve $\text{NaCl}_{(\text{s})}$ dans le **sel de table**. Il sert donc beaucoup en cuisine et dans la restauration...

Q 27. ▷ L'équation de dissolution est $\text{NaCl}_{(\text{s})} = \text{Na}^+_{(\text{aq})} + \text{Cl}^-_{(\text{aq})}$.

▷ Si le solide est mis en large excès, il en reste à l'état final et on peut écrire la loi d'action des masses :

$$K^\circ = K_s = \frac{[\text{Na}^+]}{C^\circ} \times \frac{[\text{Cl}^-]}{C^\circ} = \left(\frac{s}{C^\circ} \right)^2 \text{ avec } s \text{ la solubilité exprimée en mol/L. D'où } s = C^\circ \sqrt{K_s} \simeq 5,7 \text{ mol/L}$$

▷ Ici, il a été mis 1 mol de $\text{NaCl}_{(\text{s})}$ dans 1 L d'eau pure. On a **1 mol/L < s = 5,7 mol/L** donc la **dissolution est totale**.

Remarques :

— La loi d'action des masses n'est pas vérifiée à l'état final dans ce cas puisqu'il ne reste pas de solide : $Q_f < K^\circ$

— Dans le cas où le solide est mis en large excès, la relation $K_s = \frac{[\text{Na}^+]}{C^\circ} \times \frac{[\text{Cl}^-]}{C^\circ}$ est une forte approximation car les ions en solution sont alors trop concentrés pour pouvoir écrire $a(\text{Na}^+) = \frac{[\text{Na}^+]}{C^\circ}$. Un facteur correctif γ_i appelé coefficient d'activité modifie les activités des ions dans ce cas : $K_s = \gamma_{\text{Na}^+} \frac{[\text{Na}^+]}{C^\circ} \times \gamma_{\text{Cl}^-} \frac{[\text{Cl}^-]}{C^\circ} = \gamma_{\text{Na}^+} \gamma_{\text{Cl}^-} \left(\frac{s}{C^\circ} \right)^2$. Comme les coefficients d'activités sont ≤ 1 (cas d'égalité pour les solutions idéales), on a $s > C^\circ \sqrt{K_s} \simeq 5,7 \text{ mol/L}$ et cela ne change pas le résultat de la question : la dissolution est totale.

Q 28. ▷ D'après le document, les espèces présentes sont $\text{Na}^+_{(\text{aq})}$, $\text{Cl}^-_{(\text{aq})}$, $\text{Na}_{(\text{s})}$ (car il se forme) et $\text{Cl}_{2(\text{g})}$ (car un gaz verdâtre est libéré et car c'est la seule espèce du document réponse formant un couple avec $\text{Cl}^-_{(\text{aq})}$).

▷ Formation du sodium solide : $\text{Na}^+_{(\text{aq})}/\text{Na}_{(\text{s})}$: $\text{Na}^+_{(\text{aq})} + 1\text{e}^- = \text{Na}_{(\text{s})}$. C'est une **réduction** car elle forme le réducteur du couple. Elle a donc lieu à la **cathode**.

Q 29. ▷ Formation du dichlore : $\text{Cl}_{2(\text{g})}/\text{Cl}_{2(\text{aq})}^-$: $2\text{Cl}_{2(\text{aq})}^- = \text{Cl}_{2(\text{g})} + 2\text{e}^-$: c'est une **oxydation anodique**.

▷ Le **gaz verdâtre libéré** est le **dichlore** $\text{Cl}_{2(\text{g})}$. Il est très toxique (il a été utilisé par les Allemands et leur alliés pendant la Première Guerre mondiale).

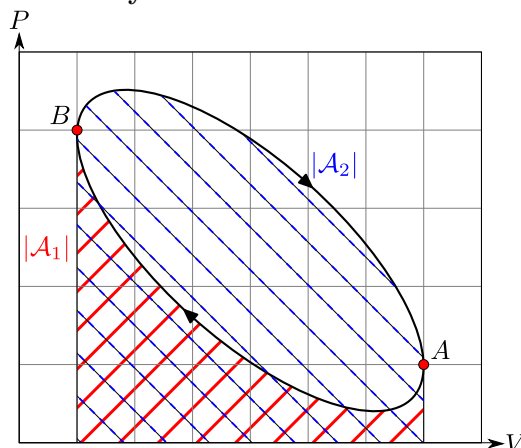
Q 30. ▷ En diagramme de Watt (P, V) le cycle tourne en **sens horaire**, c'est donc bien un **cycle moteur**.

En effet, d'après la figure ci-contre on a grâce à l'interprétation du travail en terme d'aire ($W = -\int_1^2 P dV = \pm |\mathcal{A}|$: + (resp. -) si c'est une compression $dV < 0$ (resp. dilatation $dV > 0$)).

$$W_{A \rightarrow A} = \underbrace{W_{A \rightarrow B}}_{+|\mathcal{A}_1|} + \underbrace{W_{B \rightarrow A}}_{-|\mathcal{A}_2|} = +|\mathcal{A}_1| - |\mathcal{A}_2| < 0$$

Cette différence d'aire est évidemment négative pour un cycle en sens horaire car $|\mathcal{A}_2| > |\mathcal{A}_1|$.

$|\mathcal{A}_2| - |\mathcal{A}_1|$ = l'aire du cycle représente le travail fourni par le moteur en un cycle.



Q 31. ▷ On estime l'aire du cycle à 13 (± 2) carreaux donc le **travail fourni par le moteur** est de $13 \times 0,1 \cdot 10^{-3} \times 10^5 = 130 \text{ J}$

Remarque : Mesure faite à la louche... Avec la formule de l'aire d'une ellipse $\mathcal{A} = \pi ab$ on obtient une mesure plus précise de l'aire : 14 carreaux et donc 140 J de travail fourni sur un cycle.

Q 32. Voir la **figure B du document réponse** à la dernière page de ce document.

Q 33. ▷ Puisque l'on a un gaz parfait (noté GP dans la suite) en transformation isotherme, on a :

$$W_{12} = -\int_1^2 P dV = -nRT_1 \int_1^2 \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = nRT_1 \ln r \text{ soit } W_{12} = nRT_1 \ln r > 0$$

▷ Pour Q_{12} on applique le 1^{er} principe sur le fluide de la machine entre 1 et 2 :

$$Q_{12} = \Delta U_{12} - W_{12} = 0 - W_{12} = -nRT_1 \ln r \quad (\Delta U_{12} = 0 \text{ car } U(T) \text{ pour un GP et que } 1 \rightarrow 2 \text{ est une isotherme}).$$

$$\text{D'où } Q_{12} = -W_{12} = -nRT_1 \ln r < 0$$

▷ Les signes étaient attendus car $1 \rightarrow 2$ est une compression (donc $W_{12} > 0$) au cours de laquelle le fluide cède un transfert thermique à la source froide (donc $Q_{12} < 0$).

Q 34. Pour une transformation isochore, comme le travail est nul on a directement via le 1^{er} principe :

$$Q_{23} = \Delta U_{23} = C_V (T_3 - T_1) \text{ soit } Q_{23} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_3 - T_1) > 0. \text{ Le signe était attendu car le fluide reçoit un transfert thermique pour s'échauffer de } T_1 \text{ à } T_3 \text{ au contact de la source chaude.}$$

Q 35. Dans cette question les justifications sont identiques à celle de la **Q 33**.

$$\triangleright W_{34} = -\int_3^4 P dV = -nRT_3 \int_3^4 \frac{dV}{V} = -nRT_3 \ln \frac{V_1}{V_2} = -nRT_3 \ln r \text{ d'où } W_{34} = -nRT_3 \ln r < 0$$

$$\triangleright \text{Puis } Q_{34} = \Delta U_{34} - W_{34} = -W_{34} = nRT_3 \ln r \text{ soit } Q_{34} = -W_{34} = nRT_3 \ln r > 0$$

▷ Les signes étaient attendus car $3 \rightarrow 4$ est une détente (donc $W_{34} < 0$) au cours de laquelle le fluide reçoit un transfert thermique de la part de la source chaude (donc $Q_{34} > 0$).

Q 36. Similairement à la **Q 33**, $Q_{41} = \Delta U_{41} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_1 - T_4)$ avec $T_4 = T_3$ car $3 \rightarrow 4$ est isotherme.

Ainsi, $Q_{41} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_1 - T_3) < 0$. On a donc $Q_{41} = -Q_{23} < 0$ car le fluide cède un transfert thermique pour se refroidir de T_3 à T_1 au contact de la source froide.

$$\mathbf{Q\ 37.} \quad \eta = \frac{\text{Grandeur utile}}{\text{Grandeur payante}} = \frac{-(W_{34} + W_{12})}{Q_{23} + Q_{34}}$$

▷ La grandeur utile est $-(W_{34} + W_{12})$ car elle représente l'aire du cycle c'est-à-dire l'énergie récupérable sous forme de travail sur un cycle.

▷ La grandeur payante est $Q_{23} + Q_{34}$ car ce sont les deux échanges énergétiques coûteux puisqu'ils se font au contact de la source chaude.

$$\triangleright \text{Les questions } \mathbf{Q\ 33.} \text{ à } \mathbf{Q\ 36.} \text{ donnent : } \eta = \frac{nRT_3 \ln r - nRT_1 \ln r}{\frac{nR}{\gamma - 1} (T_3 - T_1) + nRT_3 \ln r} = \frac{1 - T_1/T_3}{1 + \frac{T_3 - T_1}{T_3 \times (\gamma - 1) \ln r}}$$

Q 38. ▷ Le **rendement de Carnot** est le **rendement maximal** d'un **moteur ditherme** avec une source chaude à $T_c = T_3$ et une source froide à $T_f = T_1$. Le rendement de Carnot est atteint pour le cycle théorique constitué de deux transformations adiabatiques-réversibles et de deux isothermes réversibles.

▷ On montre en appliquant le 1^{er} et 2nd principe à ce cycle réversible que $\eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_1}{T_3}$

Q 39. ▷ Dans le cas où le régénérateur est idéal, Q_{23} n'est plus « couteux » et donc le rendement est modifié par :

$$\eta' = \frac{-(W_{34} + W_{12})}{Q_{34}} = \frac{nRT_3 \ln r - nRT_1 \ln r}{nRT_3 \ln r} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = \eta_{\text{Carnot}}$$

▷ On a donc $\eta' = \eta_{\text{Carnot}}$ alors que le cycle considéré ici n'est pas un cycle de Carnot ! Mais il ne faut pas oublier que le **moteur Stirling** considéré ici est **idéalisé** (2 transformations réversibles et régénérateur idéal) et donc **non réaliste**.

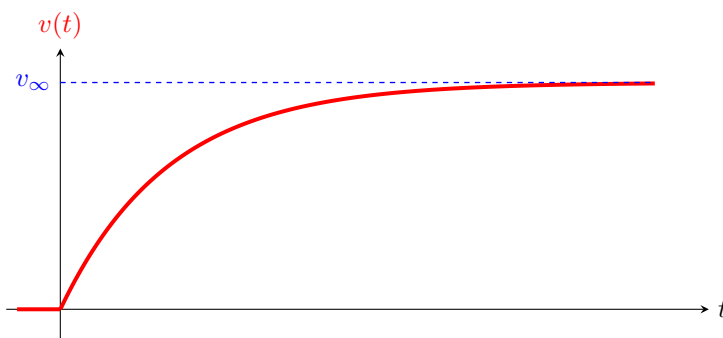
Q 40. $P_{\text{therm}} = \frac{P_{\text{elec}}}{0,4 \times (1 - T_1/T_3)} \simeq 710 \text{ W}$. Le réacteur nucléaire de la partie **I** pouvait délivrer 4 kW pendant plus de 3000 ans ; il peut donc alimenter au moins 10 moteur de Stirling du projet Krusty.

Q 41. ▷ **Loi de Lenz** : « les phénomènes d'induction s'opposent par leurs **effets**, aux **causes** qui leur ont donné naissance ».

▷ La **force de Laplace** va donc agir sur la tige comme une force de **frottement fluide dirigée suivant $-\vec{e}_x$** afin de s'opposer à la **force exercée par l'opérateur**.

Plus précisément, la force exercée par l'opérateur implique une variation du flux $\Phi_{\vec{B}}$ à travers le circuit. Un courant induit i (dont le signe dépend de l'orientation choisie...) va alors apparaître pour s'opposer à cette variation du flux. La tige va donc subir une force de Laplace qui va s'opposer à la force de l'opérateur.

▷ La vitesse v de la tige va donc **augmenter jusqu'à atteindre une vitesse limite** telle que $F + \vec{F}_{\text{lap}} \cdot \vec{e}_x = 0$. De plus, l'augmentation de la vitesse est de plus en plus lente (c'est-à-dire que l'accélération diminue). L'évolution attendue est représentée ci-dessous.



Q 42. ▷ En orientant le circuit en **sens direct** sur la **Figure A** (voir **Q 43.**), on a : $\vec{F}_{\text{lap}} = i \vec{MN} \wedge \vec{B} = i L \vec{e}_y \wedge B \vec{e}_z = i L B \vec{e}_x$
Remarque : pour s'opposer à l'augmentation du flux, $i < 0$ d'après la loi de Lenz.

Q 43. Voir le schéma ci-dessous. On garde cette orientation pour toute la suite de l'exercice.

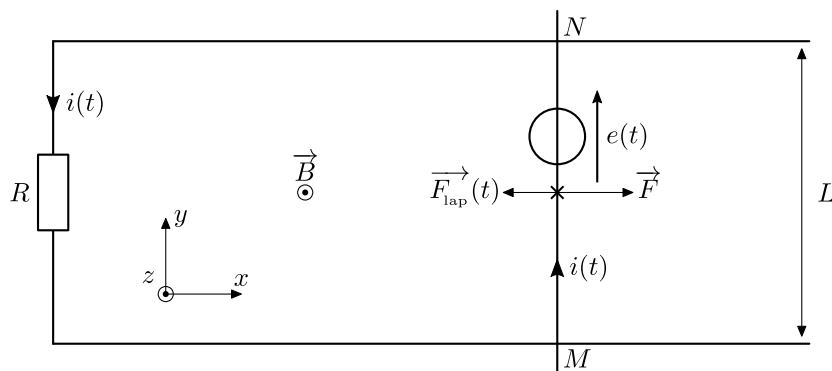


Figure A Schéma de l'expérience des rails de Laplace

Q 44. ▷ D'après la **loi de Faraday**, $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}(t)$ avec $\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \vec{B} \cdot \vec{S}$ car $\vec{B}$ uniforme sur S et car la surface est plane.

▷ $\vec{S} = L \times (\text{cte} + x(t)) \vec{e}_z$ (orientée par la règle du tournevis avec i) ; la constante dépend de l'origine des x choisie (non précisée dans l'énoncé). D'où $\Phi = L \times (\text{cte} + x(t)) \times B$.

▷ Ainsi, $e(t) = -\frac{d\Phi}{dt}(t) = -LB \frac{dx}{dt}(t) = -LBv(t)$ soit $e(t) = -LBv(t)$

Remarques :

- Le terme « Donner » choisi dans la question est aberrant ; il aurait dû être remplacé par « Établir ».
- Méthode alternative 1 : perfection de la conversion électromécanique de puissance $\Rightarrow e\vec{i} + \vec{F}_{\text{lap}} \cdot \vec{v} = 0$ et donc $e = -LBv$
- Méthode alternative 2 (hors programme donc à éviter) : on calcule la circulation du champ électromoteur de Lorentz $E_m = \vec{v} \wedge \vec{B} : e = e_{MN} = \int_M^N (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell}$ soit après calcul $e = -LBv$

Q 45. Loi des mailles en négligeant l'auto-induction ($\Rightarrow L = 0$ H) : $e(t) = Ri(t)$

Q 46. $\triangleright$ **2^{ème} loi de Newton** appliquée à la tige **MN** dans le **référentiel terrestre supposé galiléen** :

$$m \frac{dv}{dt} \vec{e}_x = \underbrace{\vec{P}}_{\text{poids}} + \underbrace{\vec{R}}_{\text{réaction}} + F\vec{e}_x + \vec{F}_{\text{lap}} \text{ avec } \vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \text{ car il n'y a pas de frottement et pas de mouvement vertical.}$$

$$\triangleright \text{En projetant sur } \vec{e}_x \text{ et en exploitant } \vec{F}_{\text{lap}} = iLB\vec{e}_x \text{ on obtient : } m\dot{v}(t) = F + i(t)LB$$

Remarques : à nouveau le terme « Donner » est mal choisi. Il fallait écrire « Établir ».

Q 47. $\triangleright$ Équation électrique avec $e = -LBv \Rightarrow i = \frac{e}{R} = -\frac{LB}{R}v$ que l'on met dans l'équation mécanique de la **Q 46**.

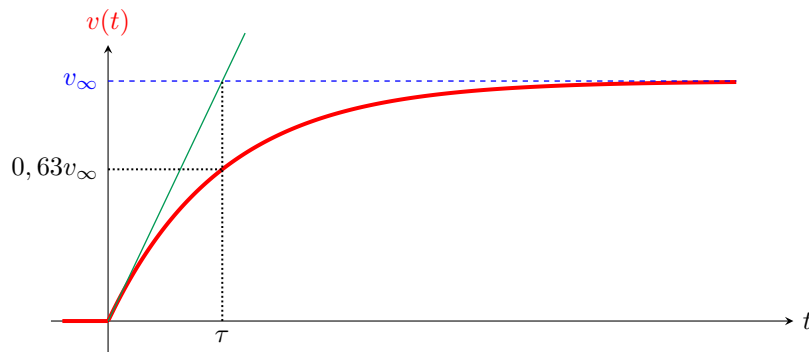
$$\triangleright m\dot{v} = F + iLB = F - \frac{(LB)^2}{R}v \text{ soit } \frac{dv}{dt} + \frac{(LB)^2}{mR}v = \frac{F}{m}$$

Q 48. L'équation différentielle de la **Q 47.** doit être **homogène**. D'où $\left[\frac{dv}{dt}\right] = \left[\frac{(LB)^2}{mR}v\right] \Rightarrow \left[\frac{mR}{(LB)^2}\right] = T$ (temps)

Q 49. $\triangleright$ On pose $\tau = \frac{mR}{(LB)^2}$ et donc l'ED en v devient : $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{F}{m} = \frac{v_\infty}{\tau}$ où l'on a posé $v_\infty = \frac{F \times \tau}{m} = \frac{FR}{(LB)^2}$

$$\triangleright \text{D'où, } v(t) = \underbrace{\text{cte} \times e^{-t/\tau}}_{v_{\text{EH}}} + \underbrace{v_\infty}_{v_{\text{SP}}} \text{ avec } v(t=0) = 0 = \text{cte} + v_\infty \Rightarrow \text{cte} = -v_\infty$$

$$\triangleright \text{Finalement, } v(t) = v_\infty \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \text{ avec } \tau = \frac{mR}{(LB)^2} \text{ et } v_\infty = \frac{F\tau}{m} = \frac{FR}{(LB)^2}.$$



Q 50. $\triangleright$ Par définition de la puissance d'une force sur un solide en translation : $\mathcal{P}_L = \vec{F}_{\text{lap}} \cdot \vec{v} = iLB\vec{e}_x \cdot v\vec{e}_x = iLBv$

On a $\mathcal{P}_L < 0$ car $i = -\frac{LB}{R}v < 0$ ($\mathcal{P}_L < 0$ était prévisible car $\vec{F}_{\text{lap}}$ s'oppose au mouvement de la tige d'après **Q 41**).

Q 51. $\triangleright$ De manière directe, on a : $\mathcal{P}_J = Ri \times i = e \times i = -iLBv$

$\triangleright$ $\mathcal{P}_J = -\mathcal{P}_L$ c'est-à-dire que $\mathcal{P}_J + \mathcal{P}_L = 0$: cela traduit la **perfection de la conversion électromécanique de puissance**.

Q 52. $\triangleright$ À nouveau par définition on a : $\mathcal{P}_{\text{op}} = \vec{F} \cdot \vec{v} = Fv$

$$\text{Q 53. } \begin{cases} \text{Équation mécanique : } m \frac{dv}{dt} = F + iLB & (1) \\ \text{Équation électrique : } Ri = -LBv & (2) \end{cases}$$

(1) $\times v$ + (2) $\times i$ donne alors le bilan de puissance $mv \frac{dv}{dt} + Ri^2 = Fv$ que l'on écrit sous la forme suivante :

$$\mathcal{P}_{\text{op}} = \mathcal{P}_J + \frac{dE_c}{dt}$$

▷ Interprétation : $\mathcal{P}_{\text{op}} > 0$ (puissance fournie par l'opérateur) se répartie en $\mathcal{P}_J > 0$ (puissance dissipée par effet Joule ; c'est la grandeur utile ici) et en $\frac{dE_c}{dt}$ (puissance cinétique qui traduit l'augmentation de l'énergie cinétique au cours du temps).

Remarque : En régime permanent, $\frac{dE_c}{dt} = 0$ et le bilan de puissance devient : $\mathcal{P}_{\text{op}} = \mathcal{P}_J$ (l'intégralité de la puissance fournie par l'opérateur est convertie en énergie électrique puis en énergie thermique par effet Joule).

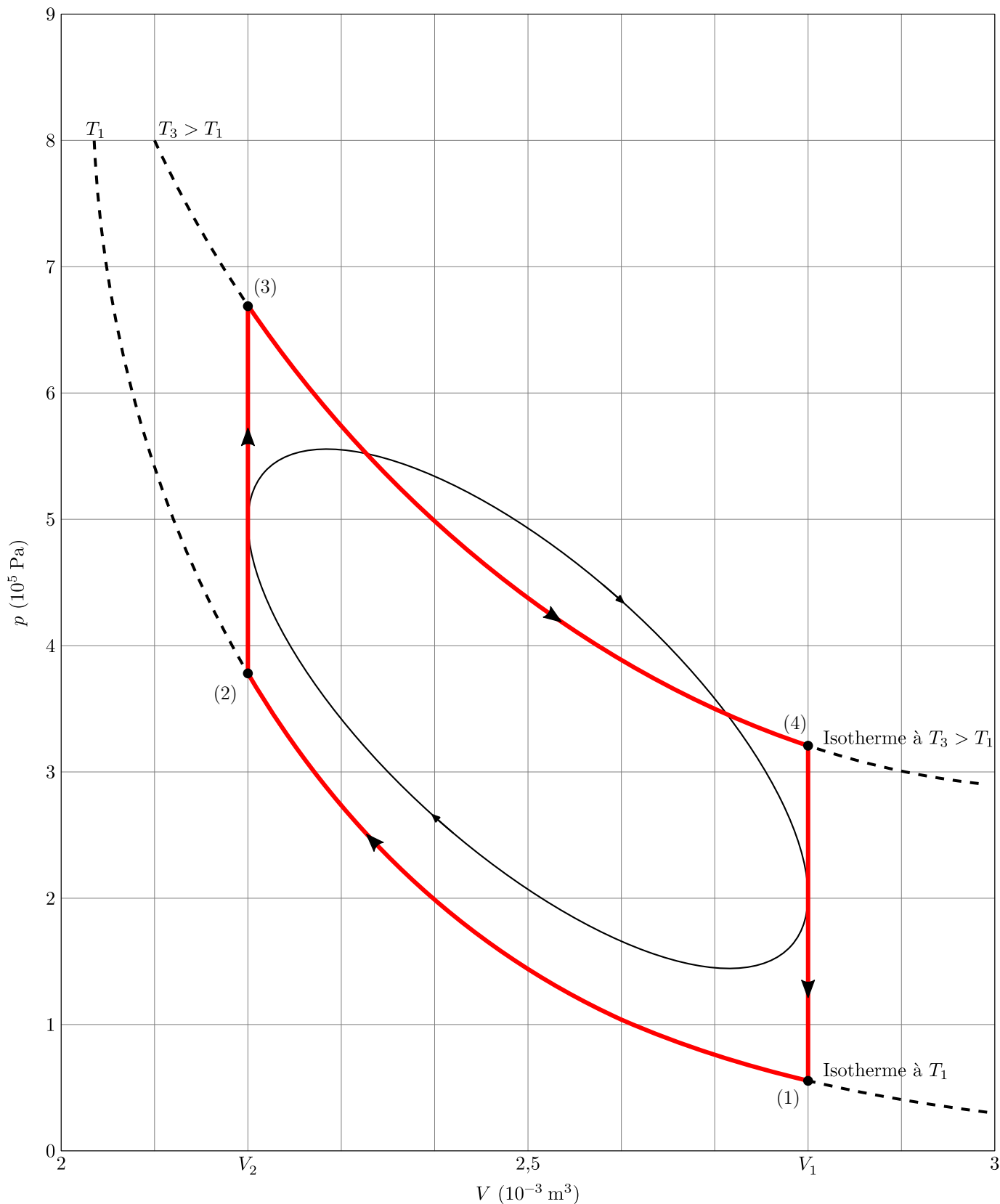


Figure B Allure du cycle réel d'un moteur Stirling dans le diagramme (p, V)