

## Exercices pour préparer la deuxième année.

Voici une sélection d'exercices que vous pouvez travailler pendant les vacances. Un certain nombre provient de la banque CCINP de la filière MP. Lorsque que c'est mentionné dans le corrigé, vous retrouvez un corrigé détaillé ici.

### 1 Nombres complexes

**Exercice 1 :**  
CCINP 84

**Exercice 2 :**  
CCINP 89

### 2 Polynômes

**Exercice 3 :**  
BCCINP 85

**Exercice 4 :**  
CCINP 87

### 3 Produit matriciel

**Exercice 5 :**

1. Posons  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  et  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ . Par définition du produit matriciel, le coefficient générique  $c_{i,j}$  de la matrice  $C = AB$  est donné par :

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,j}$$

Par définition de la trace, on a alors :

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^n c_{i,i} = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_{i,k} b_{k,i} \right)$$

Par interversion des symboles de sommation finie, il vient :

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n b_{k,i} a_{i,k} \right)$$

On reconnaît dans la somme interne le coefficient diagonal d'indice  $(k,k)$  de la matrice  $BA$ . Ainsi :

$$\text{Tr}(AB) = \sum_{k=1}^n (BA)_{k,k} = \text{Tr}(BA)$$

2. L'application  $\text{Tr}$  va de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$ . Montrons qu'elle est linéaire. Soient  $A = (a_{i,j})$  et  $B = (b_{i,j})$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , et soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Le coefficient diagonal d'indice  $(i,i)$  de la matrice  $\lambda A + B$  est  $\lambda a_{i,i} + b_{i,i}$ . Par définition de la trace :

$$\text{Tr}(\lambda A + B) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{i,i} + b_{i,i})$$

Par linéarité de la somme finie, on peut séparer les termes :

$$\text{Tr}(\lambda A + B) = \lambda \sum_{i=1}^n a_{i,i} + \sum_{i=1}^n b_{i,i} = \lambda \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B)$$

L'application  $\text{Tr}$  est donc linéaire. À valeurs dans le corps des scalaires  $\mathbb{R}$ , c'est bien une **forme linéaire**.

3. Pour montrer que  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est un produit scalaire, vérifions les quatre propriétés caractéristiques :

- **Linéarité à gauche :** Soient  $A_1, A_2, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Par linéarité de la transposition et de la trace (établie à la question précédente) :

$$\begin{aligned} \langle \lambda A_1 + A_2, B \rangle &= \text{Tr}((\lambda A_1 + A_2)^T B) = \text{Tr}((\lambda A_1^T + A_2^T) B) = \text{Tr}(\lambda A_1^T B + A_2^T B) \\ &= \lambda \text{Tr}(A_1^T B) + \text{Tr}(A_2^T B) = \lambda \langle A_1, B \rangle + \langle A_2, B \rangle \end{aligned}$$

- **Symétrie** : Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . En utilisant le fait qu'une matrice et sa transposée ont la même trace ( $\text{Tr}(X) = \text{Tr}(X^T)$ ) ainsi que les propriétés de la transposition ( $(XY)^T = Y^T X^T$  et  $(X^T)^T = X$ ) :

$$\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B) = \text{Tr}((A^T B)^T) = \text{Tr}(B^T (A^T)^T) = \text{Tr}(B^T A) = \langle B, A \rangle$$

L'application est symétrique. Par linéarité à gauche et symétrie, elle est **bilinéaire**.

- **Positivité** : Soit  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Calculons  $\langle A, A \rangle = \text{Tr}(A^T A)$ . Le coefficient diagonal d'indice  $(i, i)$  de  $A^T A$  est  $\sum_{k=1}^n (A^T)_{i,k} a_{k,i} = \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2$ . En prenant la trace :

$$\langle A, A \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{k,i}^2 = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{j,i}^2$$

Cette quantité est une somme de carrés de réels, elle est donc positive :  $\langle A, A \rangle \geq 0$ .

- **Caractère défini** : Supposons que  $\langle A, A \rangle = 0$ . D'après le calcul précédent :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{j,i}^2 = 0$$

Une somme de termes positifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls. Donc, pour tout  $(i, j)$ ,  $a_{j,i}^2 = 0 \implies a_{j,i} = 0$ . On en déduit que  $A = 0$ .

**Conclusion** : L'application définit bien un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

## 4 Algèbre linéaire

**Exercice 6** :

CCINP 55

**Exercice 7** :

CCINP 60

**Exercice 8** :

CCINP 62 (sans la 2a)

**Exercice 9** :

CCINP 71

## 5 Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

**Exercice 10** :

CCINP 80

**Exercice 11** :

CCINP 81

**Exercice 12** :

CCINP 76

## 6 Fonction réelle, dérivation

**Exercice 13** :

CCINP 3

## 7 Intégration

**Exercice 14** :

1. On remarque que  $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2)$ . Par décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$$

Ainsi :

$$I_1 = \int_0^1 \left( \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \left[ \ln|x+1| - \ln|x+2| \right]_0^1 = (\ln 2 - \ln 3) - (0 - \ln 2) = 2 \ln 2 - \ln 3$$

2. Utilisons le changement de variable trigonométrique  $x = \tan(\theta)$ . La fonction  $\tan$  est une bijection de  $[0, \frac{\pi}{4}]$  sur  $[0, 1]$ . On a  $dx = (1 + \tan^2(\theta)) d\theta = \frac{1}{\cos^2(\theta)} d\theta$ .

Modifions les bornes :

- Si  $x = 0$ , alors  $\theta = 0$ .

- Si  $x = 1$ , alors  $\theta = \frac{\pi}{4}$ .

De plus,  $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\tan^2(\theta)} = \frac{1}{\cos(\theta)}$  car  $\cos(\theta) > 0$  sur  $[0, \frac{\pi}{4}]$ .

En injectant ces éléments, l'intégrale devient :

$$I_2 = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan^3(\theta)}{\frac{1}{\cos(\theta)}} \cdot \frac{1}{\cos^2(\theta)} d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{\tan^3(\theta)}{\cos(\theta)} d\theta$$

Puisque  $\tan^3(\theta) = \frac{\sin^3(\theta)}{\cos^3(\theta)}$ , on obtient :

$$I_2 = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^3(\theta)}{\cos^4(\theta)} d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2(\theta) \cdot \sin(\theta)}{\cos^4(\theta)} d\theta = \int_0^{\pi/4} \frac{(1-\cos^2(\theta)) \sin(\theta)}{\cos^4(\theta)} d\theta$$

Effectuons un second changement de variable en posant  $t = \cos(\theta)$ , d'où  $dt = -\sin(\theta) d\theta$ . Les bornes deviennent : si  $\theta = 0 \implies t = 1$ , et si  $\theta = \frac{\pi}{4} \implies t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$I_2 = \int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1-t^2}{t^4} (-dt) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \left( \frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2} \right) dt$$

Il ne reste plus qu'à intégrer ces puissances usuelles :

$$I_2 = \left[ -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} \right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 = \left( -\frac{1}{3} + 1 \right) - \left( -\frac{1}{3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3} + \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right)$$

Sachant que  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$  :

$$I_2 = \frac{2}{3} - \left( -\frac{4}{3\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \right) = \frac{2}{3} - \left( -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \sqrt{2} \right) = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}$$

**Conclusion :**

$$I_2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{3}$$

3. On effectue une IPP en posant :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(x) \implies u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = x^2 \implies v(x) = \frac{x^3}{3} \end{cases}$$

$u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur l'intervalle :

$$I_3 = \left[ \frac{x^3}{3} \ln(x) \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{3} dx = \left( \frac{e^3}{3} - 0 \right) - \left[ \frac{x^3}{9} \right]_1^e = \frac{e^3}{3} - \left( \frac{e^3}{9} - \frac{1}{9} \right) = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

4. On réécrit l'intégrande sous la forme  $x^3 e^{x^2} = x^2 \cdot (x e^{x^2})$  pour effectuer une IPP en posant :

$$\begin{cases} u(x) = x^2 \implies u'(x) = 2x \\ v'(x) = x e^{x^2} \implies v(x) = \frac{1}{2} e^{x^2} \end{cases}$$

$u$  et  $v$  sont de classe  $C^1$  sur l'intervalle :

$$I_4 = \left[ \frac{x^2}{2} e^{x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 x e^{x^2} dx = \left( \frac{e}{2} - 0 \right) - \left[ \frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{e}{2} - \left( \frac{e}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

### Exercice 15 :

1. La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$f(t) = \ln(t + \sqrt{1+t^2}).$$

La fonction  $t \mapsto t + \sqrt{1+t^2}$  est strictement positive et dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ , donc  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  par composition, car  $\ln$  l'est sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

On dérive :

$$f'(t) = \frac{1 + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{t + \sqrt{1+t^2}}.$$

On simplifie :

$$f'(t) = \frac{\sqrt{1+t^2} + t}{\sqrt{1+t^2}(t + \sqrt{1+t^2})} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Ainsi

$$\boxed{f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}}$$

2. On écrit

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2 + k^2}} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n\sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}}.$$

On reconnaît une somme de Riemann associée à la fonction

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{continue sur } [0, 1].$$

Ainsi,

$$v_n \longrightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

Or, d'après la question précédente (ou primitive connue),

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \left[ \ln \left( x + \sqrt{1+x^2} \right) \right]_0^1.$$

Donc

$$= \ln(1 + \sqrt{2}) - \ln(1) = \ln(1 + \sqrt{2}).$$

Ainsi

$$\boxed{v_n \longrightarrow \ln(1 + \sqrt{2})}.$$

### Exercice 16 :

1. On effectue une intégration par parties (IPP) pour exprimer  $J_n$  en posant :

$$\begin{cases} u(x) = \ln(1+x^2) \implies u'(x) = \frac{2x}{1+x^2} \\ v'(x) = x^n \implies v(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

On obtient alors :

$$J_n = \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \ln(1+x^2) \right]_0^1 - \frac{2}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2} dx = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} I_{n+2}$$

En isolant  $I_{n+2}$ , on trouve pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$I_{n+2} = \frac{\ln(2) - (n+1)J_n}{2}$$

2. À partir de la relation précédente, on isole le terme  $(n+1)J_n$  :

$$(n+1)J_n = \ln(2) - 2I_{n+2}$$

D'après la question 1, on sait que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ , donc par décalage d'indice  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n+2} = 0$ . Par passage à la limite, on en déduit immédiatement :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1)J_n = \ln(2)$$

## 8 Suites numériques

### Exercice 17 :

1. Étude de  $f$  :

(a)  $f$  est une fonction polynomiale, dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  avec  $f'(x) = \frac{x}{2}$ . Pour tout  $x > 0$ ,  $f'(x) > 0$ , donc  $f$  est **strictement croissante** sur  $\mathbb{R}_+$ .

(b)  $g(x) = 0 \iff \frac{x^2+3}{4} - x = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0$ . Le discriminant est  $\Delta = 16 - 12 = 4 = 2^2$ . Les racines sont  $x_1 = \frac{4-2}{2} = 1$  et  $x_2 = \frac{4+2}{2} = 3$ . Les points fixes de  $f$  sont **1 et 3**.

(c) Le trinôme  $x^2 - 4x + 3$  est du signe de  $a = 1 > 0$  (positif) à l'extérieur des racines et négatif entre les racines. On en déduit le signe de  $g(x)$  sur  $\mathbb{R}_+$  :

- $g(x) \geq 0$  sur  $[0, 1] \cup [3, +\infty[$
- $g(x) \leq 0$  sur  $[1, 3]$

2. Premier cas : l'intervalle  $I = [0, 1]$ .

(a) Comme  $f$  est croissante,  $0 \leq x \leq 1 \implies f(0) \leq f(x) \leq f(1) \implies \frac{3}{4} \leq f(x) \leq 1$ . Puisque  $[\frac{3}{4}, 1] \subset [0, 1]$ , l'intervalle  $I$  est stable par  $f$ .

Par une récurrence immédiate (ou en citant le cours !) :  $u_0 \in [0, 1]$  et  $u_n \in I \implies u_{n+1} = f(u_n) \in I$ , donc  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [0, 1]$ .

(b) Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [0, 1]$ . D'après la question 1.c,  $g(u_n) \geq 0 \implies f(u_n) - u_n \geq 0 \implies u_{n+1} \geq u_n$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est donc **croissante**.

(c) La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et majorée par 1, donc elle converge vers une limite  $\ell \in [0, 1]$ . Par continuité de  $f$ ,  $\ell$  vérifie  $f(\ell) = \ell \iff g(\ell) = 0$ . Les seuls points fixes sont 1 et 3. Comme  $u_0 \leq \ell \leq 1$ , on a nécessairement  $\ell = 1$ .

3. Deuxième cas : l'intervalle  $J = [1, 3]$ .

- **Stabilité** : Par croissance de  $f$ ,  $1 \leq x \leq 3 \implies f(1) \leq f(x) \leq f(3) \implies 1 \leq f(x) \leq 3$ . Donc  $J$  est stable par  $f$ , ce qui implique par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [1, 3]$ .
- **Variations** : Comme  $u_n \in [1, 3]$ , on a  $g(u_n) \leq 0 \implies u_{n+1} \leq u_n$ . La suite est donc **décroissante**.
- **Convergence** : La suite étant décroissante et minorée par 1, elle converge vers un point fixe  $\ell \in [1, 3]$ . Puisque  $1 \leq \ell \leq u_0 \leq 3$ , le théorème de la limite monotone et l'unicité des points fixes imposent :
  - Si  $u_0 \in [1, 3[$ , la suite est décroissante et converge vers  $\ell = 1$ . En effet  $u_n \leq u_0 < 3 \implies \ell < 3$ .
  - Si  $u_0 = 3$ , la suite est constante et égale à 3.

**Exercice 18 :**

La fonction  $f$  associée à la suite est définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

La suite est ainsi définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**1. Positivité de la suite**

Montrons par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ .

- **Initialisation** :  $u_0 = 1 > 0$ , la propriété est vraie au rang 0.
- **Hérédité** : Supposons que  $u_n > 0$  pour un certain rang  $n$ . Alors  $1 + u_n^2 > 0$ , d'où  $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n^2} > 0$ . L'hérédité est vérifiée.

Ainsi, par récurrence, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement positive.

**2. Monotonie de la suite**

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , étudions le signe de la différence  $u_{n+1} - u_n$  :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{1 + u_n^2} - u_n = u_n \left( \frac{1}{1 + u_n^2} - 1 \right) = \frac{-u_n^3}{1 + u_n^2}$$

Comme  $u_n > 0$ , on a  $-u_n^3 < 0$  et  $1 + u_n^2 > 0$ . Par conséquent,  $u_{n+1} - u_n < 0$ , ce qui prouve que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est **strictement décroissante**.

**Remarque** : on peut étudier la fonction  $g : x \mapsto f(x) - x$ .

**3. Convergence et limite**

La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est :

- décroissante,
- minorée par 0 (car  $u_n > 0$ ).

D'après le **théorème de la convergence monotone**, la suite converge vers une limite réelle  $\ell \geq 0$ .

La fonction  $f$  étant continue sur  $\mathbb{R}^+$ , la limite  $\ell$  doit être un point fixe de  $f$ , c'est-à-dire vérifier l'équation  $f(\ell) = \ell$  :

$$\frac{\ell}{1 + \ell^2} = \ell \iff \ell = \ell(1 + \ell^2) \iff \ell^3 = 0 \iff \ell = 0$$

**Conclusion** : La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge et sa limite est 0.

**Exercice 19 :**

**1. Existence et unicité de la solution  $\alpha_n$**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . L'équation  $(E_n)$  n'a de sens que pour  $x > 0$  en raison de la présence du logarithme népérien. De plus, si  $x \in ]0, 1]$ , on a  $\ln(x) \leq 0$  et  $x^n > 0$ , donc  $x^n \ln(x) \leq 0$ . Comme  $1 > 0$ , l'équation n'admet aucune solution sur  $]0, 1]$ .

On restreint donc l'étude à l'intervalle  $I = ]1, +\infty[$ . Soit  $f_n$  la fonction définie sur  $I$  par :

$$f_n(x) = x^n \ln(x)$$

La fonction  $f_n$  est dérivable sur  $I$  comme produit de fonctions dérivables. Pour tout  $x \in I$  :

$$f'_n(x) = nx^{n-1} \ln(x) + x^n \cdot \frac{1}{x} = x^{n-1} (n \ln(x) + 1)$$

Pour tout  $x \in ]1, +\infty[$ , on a  $x^{n-1} > 0$  et  $\ln(x) > 0$ , donc  $f'_n(x) > 0$ . La fonction  $f_n$  est donc strictement croissante sur  $]1, +\infty[$ .

Calculons les limites de  $f_n$  aux bornes de  $I$  :

- $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_n(x) = 1^n \ln(1) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ , donc par produit :  
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$

La fonction  $f_n$  est continue et strictement croissante sur  $]1, +\infty[$ . Elle réalise donc une bijection de  $]1, +\infty[$  sur  $]0, +\infty[$ . Comme  $1 \in ]0, +\infty[$ , d'après le théorème de la bijection, l'équation  $f_n(x) = 1$  admet une unique solution sur  $]1, +\infty[$ .

En conclusion, l'équation  $(E_n)$  admet une unique solution positive pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , notée  $\alpha_n$ , et on a de plus :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_n > 1$$

## 2. Étude de la monotonie de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Par définition de  $\alpha_n$  et  $\alpha_{n+1}$ , on a :

$$f_n(\alpha_n) = 1 \quad \text{et} \quad f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 1$$

Évaluons la fonction  $f_{n+1}$  au point  $\alpha_n$  :

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n^{n+1} \ln(\alpha_n) = \alpha_n \cdot (\alpha_n^n \ln(\alpha_n))$$

Or, par définition,  $\alpha_n^n \ln(\alpha_n) = 1$ . On en déduit :

$$f_{n+1}(\alpha_n) = \alpha_n \cdot 1 = \alpha_n$$

Comme on a établi que  $\alpha_n > 1$ , il vient :

$$f_{n+1}(\alpha_n) > 1$$

Puisque  $1 = f_{n+1}(\alpha_{n+1})$ , nous obtenons l'inégalité suivante :

$$f_{n+1}(\alpha_n) > f_{n+1}(\alpha_{n+1})$$

La fonction  $f_{n+1}$  étant strictement croissante sur  $]1, +\infty[$ , on peut appliquer sa réciproque (qui est aussi strictement croissante) pour en déduire :

$$\alpha_n > \alpha_{n+1}$$

La suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est donc strictement décroissante.

## 3. Convergence et limite de la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

La suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante et minorée par 1. D'après le théorème de la convergence monotone, la suite  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers une limite réelle notée  $\ell$ , avec  $\ell \geq 1$ .

Montrons par l'absurde que  $\ell = 1$ . Supposons que  $\ell > 1$ . Puisque la suite est décroissante et converge vers  $\ell$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\alpha_n \geq \ell > 1$$

Par croissance de la fonction logarithme :

$$\ln(\alpha_n) \geq \ln(\ell) > 0$$

De plus, comme  $\alpha_n \geq \ell$ , en élevant à la puissance  $n$ , on obtient :

$$\alpha_n^n \geq \ell^n$$

En multipliant ces deux inégalités (tous les termes étant strictement positifs), il vient :

$$\alpha_n^n \ln(\alpha_n) \geq \ell^n \ln(\ell)$$

C'est-à-dire :

$$1 \geq \ell^n \ln(\ell)$$

Or, par croissances comparées :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ell^n \ln(\ell) = +\infty$$

En passant à la limite dans l'inégalité  $1 \geq \ell^n \ln(\ell)$ , on obtient :

$$1 \geq +\infty$$

Ce qui est une contradiction.

L'hypothèse  $\ell > 1$  est donc fautive. Comme on savait déjà que  $\ell \geq 1$ , on en conclut que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$$

## 9 Séries numériques

### Exercice 20 :

- Convergence :** On reconnaît le terme général d'une série exponentielle de paramètre  $x = 3$ , qui converge pour tout réel.

**Calcul :** La somme commence à  $n = 1$ . On réintroduit le terme pour  $n = 0$  :

$$S_1 = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{n!} \right) - \frac{3^0}{0!}$$

D'après la formule de la série exponentielle ( $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ ), on a :

$$S_1 = e^3 - 1$$

- Convergence :** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{2n+1}{n!} = \frac{2}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}$ . On obtient deux termes proportionnels à des termes généraux de séries exponentielles convergentes, donc la série converge par linéarité.

**Calcul :** On sépare la somme en deux parties :

$$S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

Le terme pour  $n = 0$  de la première somme étant nul, on commence à  $n = 1$  et on simplifie par  $n$  :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n-1)!} = 2 \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 2e^1 = 2e$$

La seconde somme donne directement  $e^1 = e$ . On conclut :

$$S_2 = 2e + e = 3e$$

- Convergence :** Il s'agit d'une série géométrique de raison  $q = \frac{1}{3}$ . Comme  $|q| < 1$ , la série converge.

**Calcul :** On factorise par le premier terme de la somme ( $n = 2$ ) pour se ramener à une forme classique :

$$S_3 = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \frac{1}{9} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k$$

En appliquant la formule de la somme d'une série géométrique ( $\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ ), on obtient :

$$S_3 = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{6}$$

### Exercice 21 :

- Pour  $a > 0$  et  $x > a$ , comme  $\alpha > 1$  :

$$\int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \left[ \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_a^x = \frac{1}{\alpha-1} \left( \frac{1}{a^{\alpha-1}} - \frac{1}{x^{\alpha-1}} \right)$$

Comme  $\alpha - 1 > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-(\alpha-1)} = 0$ , d'où :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x \frac{dt}{t^\alpha} = \frac{1}{(\alpha-1)a^{\alpha-1}}$$

- On va comparer la somme à une intégrale. La fonction  $x \mapsto x^{-\alpha}$  étant décroissante, on en déduit que, pour tout  $k \geq 2$ , on a

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$

On somme ces inégalités pour  $k$  allant de  $n+1$  à  $N$ . On trouve :

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_n^N \frac{dt}{t^\alpha}.$$

On fait tendre  $N$  vers  $+\infty$ . En utilisant le résultat de la question précédente, on trouve que

$$\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

On en déduit que

$$\frac{R_n}{\frac{1}{n^{\alpha-1}(\alpha-1)}} \rightarrow 1$$

c'est-à-dire

$$R_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$

**Exercice 22 :**  
CCINP 6

## 10 Probabilités

**Exercice 23 :**  
CCINP 107

**Exercice 24 :**  
CCINP 95

**Exercice 25 :**  
CCINP 98

**Exercice 26 :**  
CCINP 105

## 11 Fonctions de deux variables

**Exercice 27 :**

1. La fonction  $t \mapsto (2 + 2t, t^2)$  est de classe  $C^1$ , car polynomiale, donc  $g$  est de classe  $C^1$  par composition. On applique ensuite la formule de la dérivée d'une fonction composée. Si on note  $u(t) = 2 + 2t$  et  $v(t) = t^2$ , alors

$$g'(t) = u'(t) \frac{\partial f}{\partial x}(u(t), v(t)) + v'(t) \frac{\partial f}{\partial y}(u(t), v(t))$$

soit

$$g'(t) = 2 \frac{\partial f}{\partial x}(2 + 2t, t^2) + 2t \frac{\partial f}{\partial y}(2 + 2t, t^2)$$

2. La fonction  $(u, v) \mapsto (uv, u^2 + v^2)$  est de classe  $C^1$  car polynomiale, donc  $h$  est de classe  $C^1$ . Notons  $r(u, v) = uv$  et  $q(u, v) = u^2 + v^2$ . Le théorème de dérivation d'une composée dit que

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial r}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial f}{\partial x}(r(u, v), q(u, v)) + \frac{\partial q}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial f}{\partial y}(r(u, v), q(u, v))$$

Ceci donne

$$\frac{\partial h}{\partial u}(u, v) = v \frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2 + v^2) + 2u \frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2)$$

De même on trouve

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u, v) = u \frac{\partial f}{\partial x}(uv, u^2 + v^2) + 2v \frac{\partial f}{\partial y}(uv, u^2 + v^2).$$

**Exercice 28 :**  
CCINP 33