Exercices pour préparer la deuxième année.

Voici une sélection d'exercices que vous pouvez travailler pendant les vacances. Un certain nombre provient de la banque CCINP de la filière MP. Lorsque que c'est mentionné dans le corrigé, vous retrouvez un corrigé détaillé ici.

1 Nombres complexes

Exercice 1 :

1. Donner la définition d'un argument d'un nombre complexe non nul (on ne demande ni l'interprétation géométrique, ni la démonstration de l'existence d'un tel nombre).
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner, en justifiant, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^n = 1$ et préciser leur nombre.
3. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(z+\mathrm{i})^n = (z-\mathrm{i})^n$ et démontrer que ce sont des nombres réels.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. On pose $z = e^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}$.

1. On suppose $k \in [\![1, n-1]\!]$.
Déterminer le module et un argument du complexe $z^k - 1$.
2. On pose $S = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left|z^k - 1\right|$. Montrer que $S = \dfrac{2}{\tan\frac{\pi}{2n}}$.

2 Polynômes

Exercice 3 :

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
   a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et $\forall k \in [\![0, r-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$.
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 :
Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$, $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant
$$\deg P \leqslant n \text{ et } \forall i \in [\![0, n]\!],\ P(a_i) = b_i.$$
2. Soit $k \in [\![0, n]\!]$.
Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque :
$$\forall i \in [\![0, n]\!],\quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq k \\ 1 & \text{si} \quad i = k \end{cases}$$
3. Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

3 Produit matriciel

Exercice 5 : On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. Pour une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit sa trace, notée $\mathrm{Tr}(A)$, par la somme de ses coefficients diagonaux :
$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

1. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. En explicitant les coefficients du produit matriciel, montrer que :
$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$$

2. Montrer que l'application Tr est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. On pose, pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(A^T B)$. Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \langle A, B\rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

4 Algèbre linéaire

Exercice 6 : Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia-1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par: $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.

<u>**Indication :**</u> discuter suivant les valeurs de a.

Exercice 7 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\mathrm{Ker} f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im} f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$?

Exercice 8 : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$:
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id})$.

Exercice 9 : Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D.
   Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
   Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

5 Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens

Exercice 10 :
Soit E l'espace vectoriel des applications continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que $(f \mid g) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\, g(t)\, \mathrm{d}t$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soit F le sous-espace vectoriel engendré par $f : x \mapsto \cos x$ et $g : x \mapsto \cos(2x)$.

   Déterminer le projeté orthogonal sur F de la fonction $u : x \mapsto \sin^2 x$.

Exercice 11 :
On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \mathrm{tr}\left(A^T A'\right)$, où $\mathrm{tr}\left(A^T A'\right)$ désigne la trace du produit de la matrice A^T par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.

3. Déterminer le projeté orthogonal de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.

4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Exercice 12 :
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire noté $(\ |\ )$.
On pose $\forall\, x \in E$, $||x|| = \sqrt{(x|x)}$.

1. (a) Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
   (b) Dans quel cas a-t-on égalité? Le démontrer.

2. Soit $E = \{f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}),\ \forall\, x \in [a,b]\ f(x) > 0\}$.
   Prouver que l'ensemble $\left\{\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \times \int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\ ,\ f \in E\right\}$ admet une borne inférieure m et déterminer la valeur de m.

6 Fonction réelle, dérivation

Exercice 13 :

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.

2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.

3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

7 Intégration

Exercice 14 : Calculer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$ (Décomposition en éléments simples)

2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$ (Changement de variable)

3. $I_3 = \displaystyle\int_1^e x^2 \ln(x)\,\mathrm{d}x$ (Intégration par parties)

4. $I_4 = \displaystyle\int_0^1 x^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x$ (Intégration par parties)

Indication : On pourra d'abord poser le changement de variable $x = \frac{1}{t}$, ou utiliser directement le changement de variable $x = \tan(\theta)$.

Exercice 15 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$par : $f(t) = \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)$.

1. Étudier la dérivabilité de f et calculer sa dérivée.

2. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_n$ définie par : pour tout $n \geqslant 1$,

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$$

Exercice 16 : On définit les suites réelles $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1}dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 x^n \ln\left(1+x^2\right)dx.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 .

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer I_{n+2} en fonction de J_n.

3. Déterminer la limite de la suite $((n+1)J_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8 Suites numériques

Exercice 17 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \frac{x^2+3}{4}$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \geq 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Étude de f :
   (a) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
   (b) Résoudre l'équation $g(x) = 0$. En déduire les points fixes de f.
   (c) Étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}_+$ et dresser son tableau de signes.
2. Premier cas : l'intervalle $I = [0, 1]$.
   On suppose dans cette question que $u_0 \in [0, 1]$.
   (a) Montrer que l'intervalle I est stable par f, en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
   (b) En utilisant le signe de g, déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
3. Deuxième cas : l'intervalle $J = [1, 3]$.
   On suppose dans cette question que $u_0 \in [1, 3]$. En reprenant les points précédents, étudier la convergence de la suite u.

Exercice 18 : Étudier la convergence de la suite récurrente définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 19 : Montrer que l'équation $(E_n) : x^n \ln(x) = 1$ admet une unique solution positive pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On note α_n cette solution. Étudier la monotonie de cette suite et la convergence de cette suite. Montrer que la limite de α_n est 1 (on pourra procéder par l'absurde).

9 Séries numériques

Exercice 20 : Justifier la convergence puis calculer la somme des trois séries suivantes :

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{n!}$
2. $S_2 = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{n!}$
3. $S_3 = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Exercice 21 : Soit $\alpha > 1$. On note

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

1. Soit $a > 0$. Déterminer
$$\lim_{x\to+\infty} \int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}.$$
2. En déduire un équivalent simple de R_n.

Exercice 22 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge.

   Indication: écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.
2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

10 Probabilités

Exercice 23 : On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes:
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice 24 :
Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.
2. Dans cette question, on suppose que l'on tire simultanément cinq boules dans l'urne.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.

Exercice 25 : Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0, 1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y = k|X = i)$.
   (b) Prouver que $Z = X + Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante: $\dbinom{n-i}{k-i}\dbinom{n}{i} = \dbinom{k}{i}\dbinom{n}{k}$.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 26 :

1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés (c'est-à-dire truqués).
Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\dfrac{1}{2}$.
   (a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé?
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé?
   (c) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

11 Fonctions de deux variables

Exercice 27 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.

1. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g(t) = f\left(2+2t, t^2\right)$. Démontrer que g est C^1 et calculer $g'(t)$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. On définit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $h(u,v) = f\left(uv, u^2+v^2\right)$. Démontrer que h est C^1 et exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Exercice 28 : On pose : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f\,(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f\,(0,0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.