# Analyse temporelle des systèmes du second ordre

Définition

**Système du second ordre**

Le comportement d'un système du second ordre est caractérisé par une **équation différentielle du second ordre** à coefficients constants :

$$s(t) + \frac{2\xi}{\omega_0}\frac{ds(t)}{dt} + \frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2s(t)}{dt^2} = Ke(t)$$

On appelle $K$ le **gain statique**, $\xi$ le **coefficient d'amortissement** ($\xi > 0$) et $\omega_0$ la **pulsation propre non amortie** ($\omega_0 > 0$). $\xi$ est parfois noté $\varepsilon$ ou $z$.
La fonction de transfert du second ordre est :

$$\boldsymbol{H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}}$$

**Démonstration :**
Si les conditions de Heaviside sont respectées, la transformée de Laplace conduit à l'équation :

$$\left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}\right)S(p) = KE(p) \iff \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_0}p + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$$

## 1 Réponse indicielle

Soit en entrée du système du second ordre la fonction échelon $e(t) = A\,u(t)$. La transformée de Laplace s'écrit $E(p) = \frac{A}{p}$ et la sortie dans le domaine de Laplace devient :

$$S(p) =$$

La transformée de Laplace inverse de la sortie (pour revenir au domaine temporel) se fait à l'aide du tableau des transformées usuelles. La **décomposition en éléments simples** passe en premier lieu par la **recherche des pôles**. On trouve comme pôles 0 et les racines du polynôme du second degré, qui dépendent du signe du discriminant $\Delta = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1)$.

On distingue alors les trois cas suivants :

- Si l'amortissement est fort ($\xi > 1$), alors $\Delta > 0$ et il y a deux racines réelles :

$$p_{1,2} =$$

- Si l'amortissement est critique ($\xi = 1$), alors $\Delta = 0$ et le polynôme a une racine double :

$$p_{1,2} =$$

- Si l'amortissement est faible ($\xi < 1$), alors $\Delta < 0$ et les racines du polynôme sont complexes :

$$p_{1,2} =$$

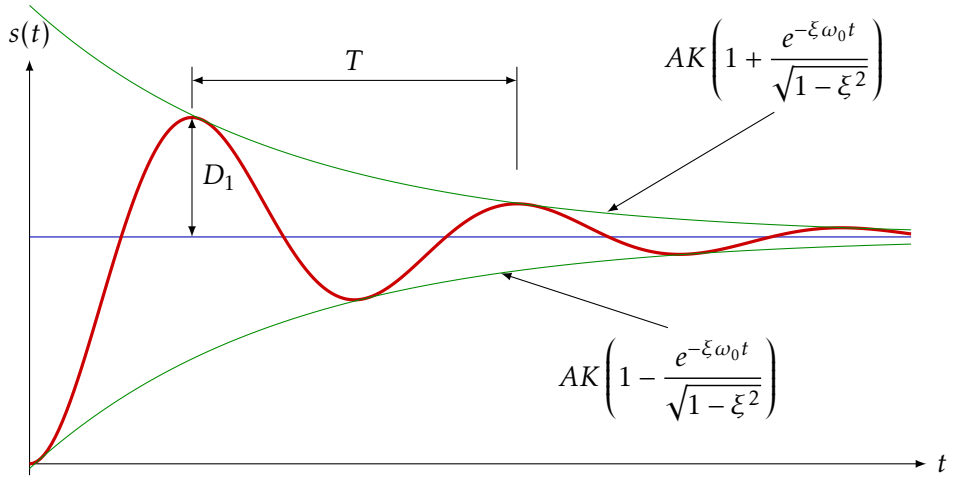
## 1.1 Amortissement faible : réponse oscillante amortie, régime pseudo-oscillant

Dans le cas où $\xi < 1$, on trouve **deux racines complexes** $p = -\xi\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$. Sachant que $\xi$ et $\omega_0$ sont positifs, on vérifie que les parties réelles sont négatives, ce qui assure un comportement stable. La décomposition en éléments simples dans l'espace des réels conduit à :

$$S(p) = \frac{KA\omega_0^2}{p(p-p_1)(p-p_2)}$$

Avec la démarche vue précédemment pour repasser dans le domaine temporel, on trouve :

$s(t) =$




**Propriétés de la réponse :**

- Fonction **oscillante** (partie sinusoïdale) amortie (exponentielle décroissante).
- Pour $t \to +\infty$, $s(t) \to$ (réponse statique ou permanente).
- Valeur à l'origine : $s(0) =$
- **Tangente à l'origine horizontale :** $\left.\dfrac{ds(t)}{dt}\right|_{t=0} =$
- On note $\omega_p =$ la **pseudo-pulsation**, qui conduit à la **pseudo-période** $T =$
- Plus $\xi$ est faible, plus les dépassements sont importants. *Plus le facteur d'amortissement est faible, moins il y a d'amortie et sans amortissement, il y a des rebonds.*

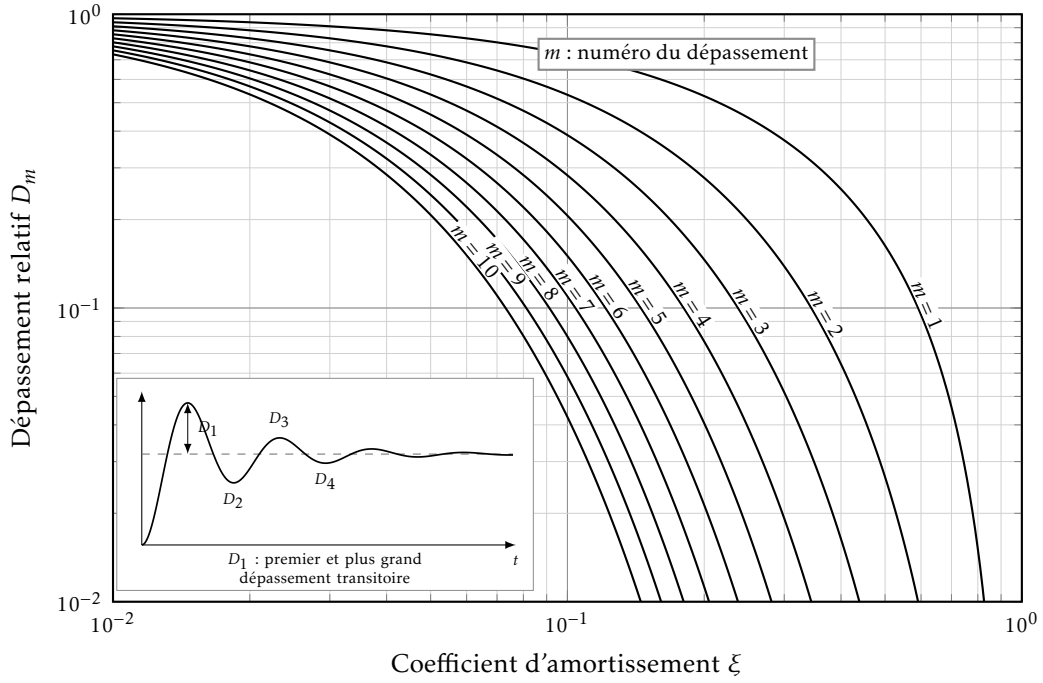
Grâce aux formules suivantes (qui ne sont pas toutes à connaître par cœur), il est possible d'identifier les paramètres caractéristiques du second ordre à l'aide de la réponse temporelle à un échelon.

| | |
|---|---|
| Dépassement $k$ | $D_k = \exp\left(-\dfrac{k\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)$ |
| Amortissement (en fonction de $D_k$) | $\xi = \left(1 + \dfrac{k^2\pi^2}{\ln^2 D_k}\right)^{-1/2}$ |
| Pseudo-pulsation | |
| Pseudo-période | $T = \dfrac{2\pi}{\omega_p} = \dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$ |
| Temps de réponse à $x\,\%$ pour $\xi \ll 1$ | $t_{x\,\%} = \dfrac{1}{\xi\omega_0}\ln\left(\dfrac{100}{x}\right)$ |

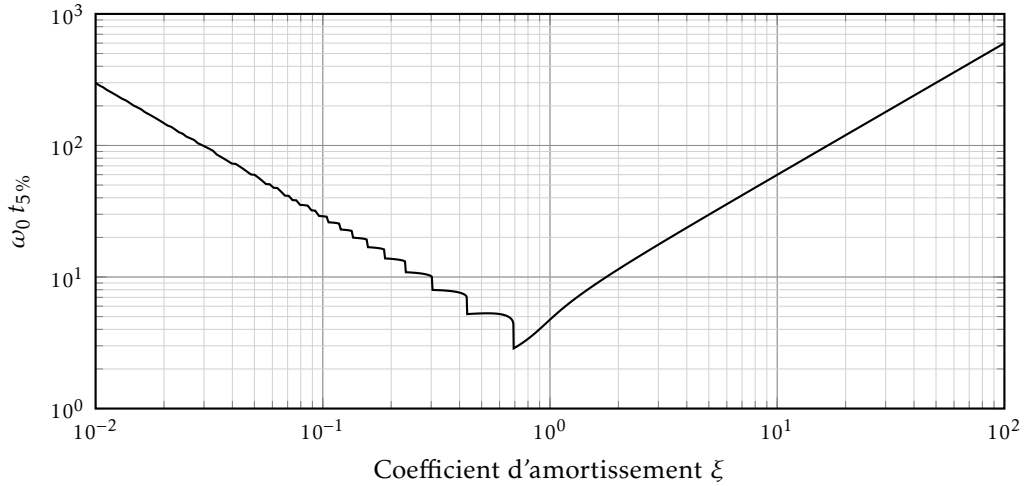
### 1.1.1 Identification à partir d'un relevé expérimental

À partir des fonctions précédentes, on peut obtenir les **abaques** suivants :

**Dépassements transitoires**




**Temps de réponse réduit à 5 %**



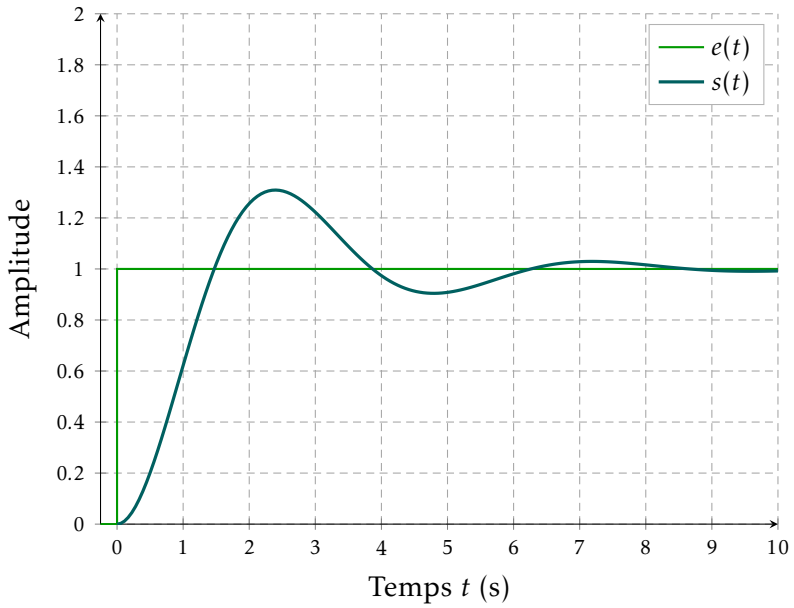
Méthode

**Identifier un second ordre à partir d'une courbe expérimentale**

1. Calcul du gain $K$ à l'aide de la valeur finale ;
2. Calcul de l'amortissement $\xi$ à l'aide du premier dépassement en utilisant l'abaque des dépassements ;
3. Calcul de la pulsation propre $\omega_0$
   - soit en mesurant la pseudo-période et en connaissant la formule,
   - soit en mesurant $t_{5\%}$ et en utilisant l'abaque du temps de réponse réduit.

### 1.1.2 Application

**Question 1 :** À partir du relevé expérimental suivant, déterminer par identification la fonction de transfert $H(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)}$.



## 1.2 Amortissement fort : réponse amortie, régime apériodique

Dans le cas où $\xi > 1$, on trouve **deux racines réelles** $p = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$. Comme précédemment, $\xi$ et $\omega_0$ sont positifs ; les deux racines sont négatives, ce qui assure un comportement stable. La décomposition en éléments simples dans l'espace des réels conduit à :

$$S(p) = \frac{KA\omega_0^2}{p(p-p_1)(p-p_2)}$$

On pose $p_1 = -\dfrac{1}{\tau_1}$ et $p_2 = -\dfrac{1}{\tau_2}$ ; ainsi $H(p)$ **peut s'exprimer comme le produit de deux premiers ordres** :

$$S(p) = \frac{KA}{p(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}$$

La réponse temporelle se calcule par la décomposition en éléments simples :

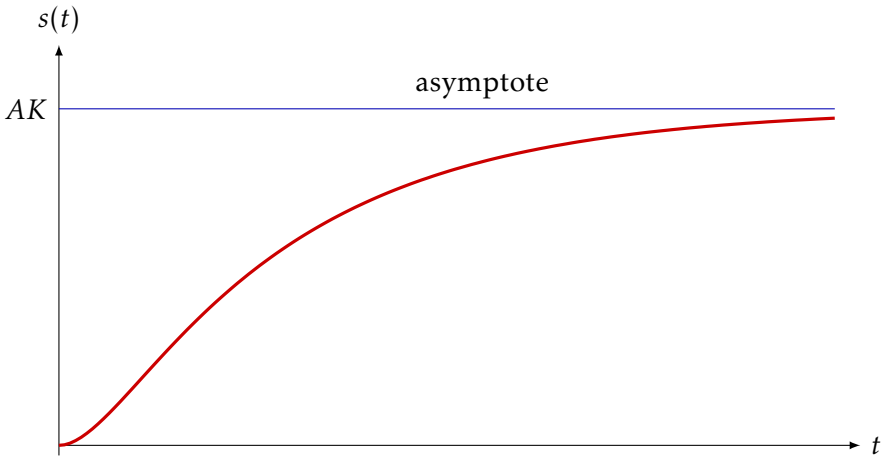
$$S(p) = KA\left[\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{1+\tau_1 p} + \frac{\gamma}{1+\tau_2 p}\right]$$

Après réduction au même dénominateur puis identification des coefficients du polynôme, on trouve :

$$S(p) = \frac{KA}{p} + \frac{KA}{\tau_2 - \tau_1}\left(\frac{\tau_1}{p+1/\tau_1} - \frac{\tau_2}{p+1/\tau_2}\right)$$

D'où la réponse temporelle :

$$s(t) = KA\,u(t)\left[1 + \frac{\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2}}{\tau_2 - \tau_1}\right]$$




**Propriétés de la réponse :**

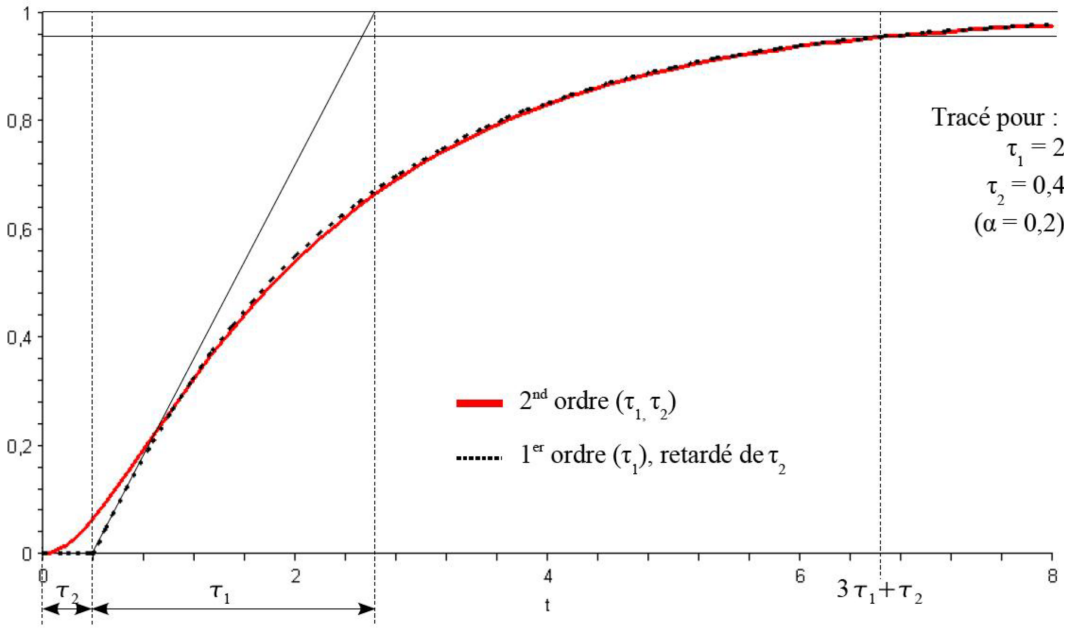
- Fonction croissante de $t$ sur $\mathbb{R}^+$.
- Asymptote pour $t \to +\infty$ : $s(t) \to$ (réponse statique ou permanente).
- Valeur à l'origine : $s(0) =$
- **Tangente à l'origine horizontale :** $\left.\dfrac{ds(t)}{dt}\right|_{t=0} =$

### 1.2.1 Identification à partir d'un relevé expérimental

On a $\xi > 1$ donc la fonction est de la forme :

$$H(p) =$$

Si $\tau_1$ et $\tau_2$ sont assez éloignés, le comportement du système s'apparente à un premier ordre de constante de temps $\tau_1$ retardé de $\tau_2$.




Et si on a $\tau_1$ et $\tau_2$, on peut retrouver $\xi$ et $\omega_0$ :

$$\begin{cases} \tau_1 + \tau_2 = \dfrac{2\xi}{\omega_0} \\ \tau_1 \tau_2 = \dfrac{1}{\omega_0^2} \end{cases} \iff \begin{cases} \xi = \\ \omega_0 = \end{cases}$$

### 1.3 Amortissement critique : réponse amortie, régime apériodique critique

Dans le cas où $\xi = 1$, on trouve une racine double $p = -\omega_0$. Cette valeur étant strictement négative, le système est stable et la réponse temporelle se calcule par la décomposition en éléments simples :

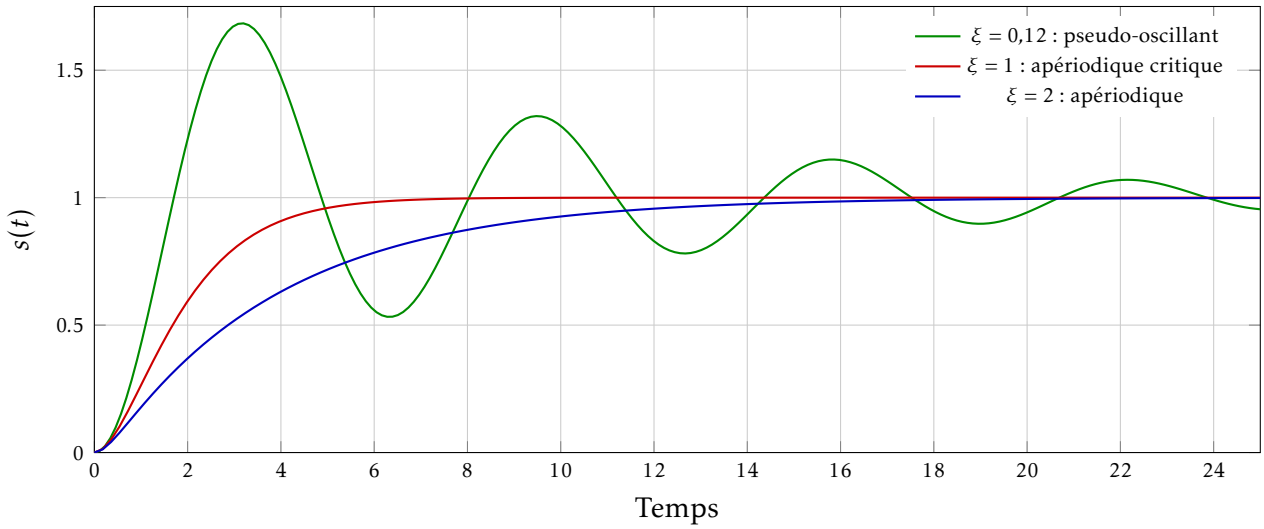
$$S(p) = \frac{KA\omega_0^2}{p(p^2 + 2\omega_0 p + \omega_0^2)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p+\omega_0} + \frac{\gamma}{(p+\omega_0)^2}$$

Après réduction au même dénominateur puis identification des coefficients du polynôme, on trouve :

$$S(p) = KA\left[\frac{1}{p} - \frac{1}{p+\omega_0} - \frac{\omega_0}{(p+\omega_0)^2}\right]$$

D'où la réponse temporelle :

$$s(t) =$$




**Propriétés de la réponse :**

- Fonction croissante de $t$ sur $\mathbb{R}^+$.
- Asymptote pour $t \to +\infty$ : $s(t) \to$ (réponse statique ou permanente).
- Valeur à l'origine : $s(0) =$
- **Tangente à l'origine horizontale :** $\left.\dfrac{ds(t)}{dt}\right|_{t=0} =$

Ici encore, la réponse est apériodique. C'est le régime limite du cas $\xi > 1$. Il est appelé régime apériodique critique.

## 2 | Performances d'un système du second ordre

- Pour $\xi > 0$ et $\omega_0 > 0$, le système du second ordre est **stable**.
- L'**erreur statique** de la réponse d'un système du second ordre est $\boldsymbol{e_{rs} = A(1-K)}$. **Le système est donc précis si $K = 1$** ; sinon l'erreur est non nulle et il faut se référer au cahier des charges.
- Si $\xi \geq 1$, la réponse **ne présente pas de dépassement** ni d'oscillations et peut se représenter comme la **multiplication de deux premiers ordres**.
- Si $\xi < 1$, la réponse **présente des oscillations donc des dépassements**.
- Pour un système du second ordre, le temps de réponse à 5 % d'une réponse indicielle dépend du facteur d'amortissement. **Le régime le plus rapide sans dépassement est obtenu pour $\xi = 1$. Le régime le plus rapide (avec dépassement) est obtenu pour $\xi = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$.**

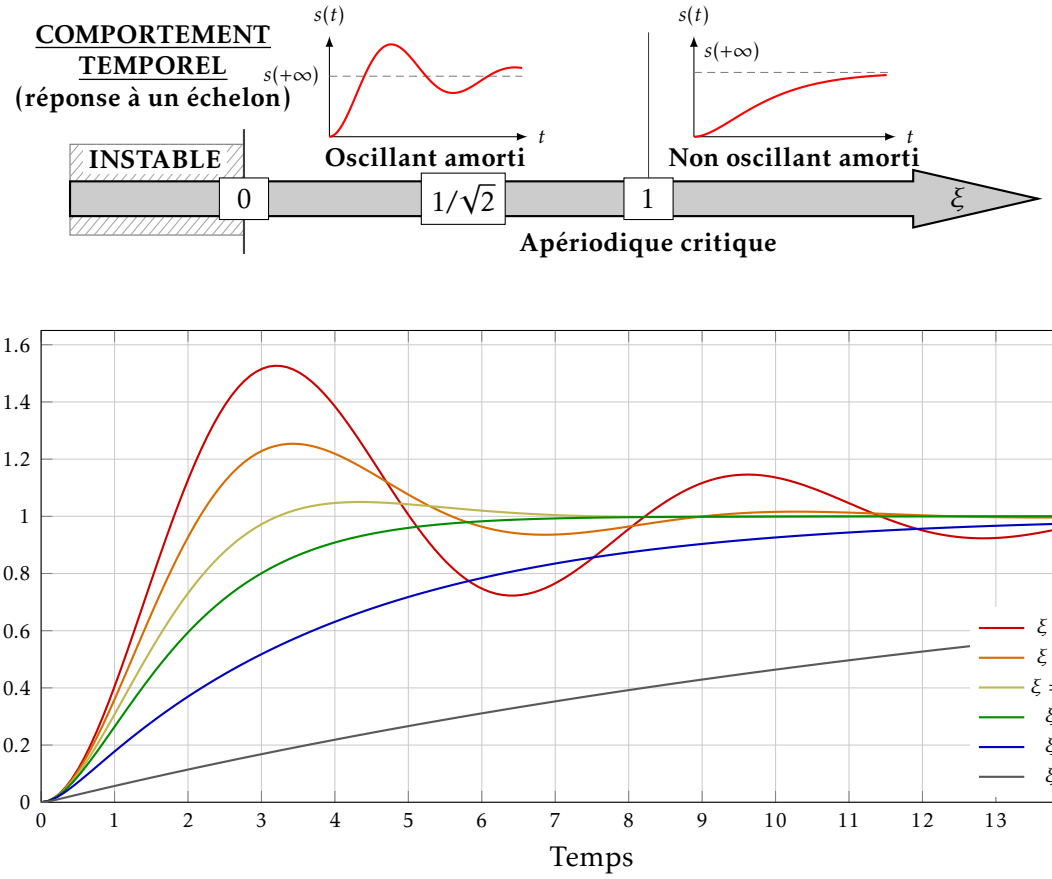



Figure 1 – Évolution de la réponse temporelle à un échelon d'un second ordre en fonction de $\xi$

**Vous devez être capables de :**

- mettre des fonctions de transfert sous forme canonique ;
- reconnaître et identifier les paramètres d'une fonction du second ordre ;
- connaître les caractéristiques d'une réponse temporelle pour un second ordre ;
- identifier une fonction du second ordre à partir d'une réponse temporelle.