



TD02-02 - correction

1 | Changements de base

1.1 Savoir réaliser une figure de changement de base

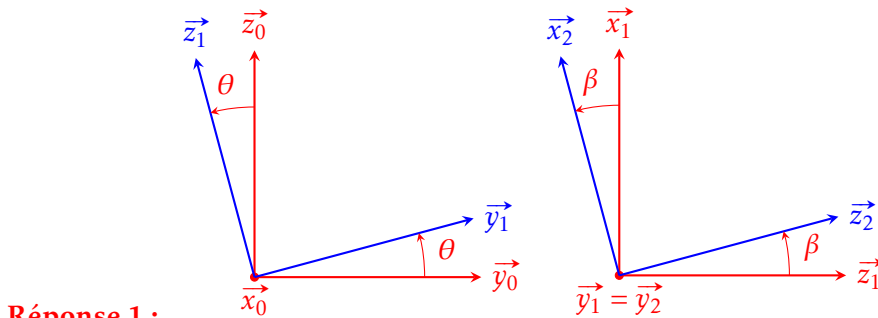
Question 1 : Réaliser les figures de changement de base pour les transformations définies ci-dessous.

$$(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow{\theta} (\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$$

C'est à dire $\theta = (\vec{y}_0, \vec{y}_1) = (\vec{z}_0, \vec{z}_1)$.

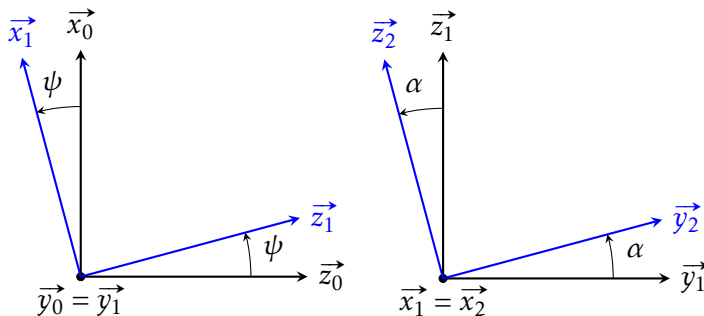
$$(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1) \xrightarrow{\beta} (\vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$$

C'est à dire $\beta = (\vec{x}_1, \vec{x}_2) = (\vec{z}_1, \vec{z}_2)$.



1.2 Savoir utiliser une figure de changement de base

Cette partie est indépendante de la précédente.



Question 2 : Exprimer les vecteurs de la base $\mathcal{B}_1 = (\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ dans la base $\mathcal{B}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Réponse 2 : $\vec{x}_1 = \cos(\psi)\vec{x}_0 - \sin(\psi)\vec{z}_0$, $\vec{y}_0 = \vec{y}_1$ et $\vec{z}_1 = \sin(\psi)\vec{x}_0 + \cos(\psi)\vec{z}_0$.

Question 3 : Exprimer $\vec{z}_2$ dans la base $\mathcal{B}_0 = (\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

Réponse 3 : Comme $\vec{z}_2$ n'est pas sur la même figure que $\mathcal{B}_0$, il faut d'abord décomposer $\vec{z}_2$ dans $\mathcal{B}_1$:

$$\vec{z}_2 = -\sin(\alpha)\vec{y}_1 + \cos(\alpha)\vec{z}_1$$

Comme $\vec{y}_1 = \vec{y}_0$, il suffit de remplacer $\vec{z}_1$:

$$\vec{z}_2 = -\sin(\alpha)\vec{y}_0 + \cos(\alpha)[\sin(\psi)\vec{x}_0 + \cos(\psi)\vec{z}_0]$$

Question 4 : Calculer, ou lire, les produits scalaires suivants :

(a) $\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_0$

(b) $\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1$

(c) $\vec{z}_1 \cdot \vec{x}_0$

(d) $\vec{z}_2 \cdot \vec{x}_0$

Réponse 4 : Cela revient à projeter. On peut aussi faire les produits scalaires par leur définition mathématique.

(a) $\vec{y}_1 \cdot \vec{y}_0 = 1$

(b) $\vec{x}_2 \cdot \vec{y}_1 = 0$

(c) $\vec{z}_1 \cdot \vec{x}_0 = \sin(\psi)$

(d) Les deux vecteurs ne sont pas sur la même figure, il faut décomposer (projeter) :

$$\vec{z}_2 \cdot \vec{x}_0 = [-\sin(\alpha)\vec{y}_1 + \cos(\alpha)\vec{z}_1] \cdot \vec{x}_0$$

Soit on distribue et on calcule les produits scalaires (qui sont sur la même figure plane), soit on continue de décomposer pour ne faire que des produits scalaires triviaux avec la base $\mathcal{B}_0$.

$$\vec{z}_2 \cdot \vec{x}_0 = -\sin(\alpha)\vec{y}_1 \cdot \vec{x}_0 + \cos(\alpha)\vec{z}_1 \cdot \vec{x}_0 = -\sin(\alpha) \times 0 + \cos(\alpha) \sin(\psi)$$

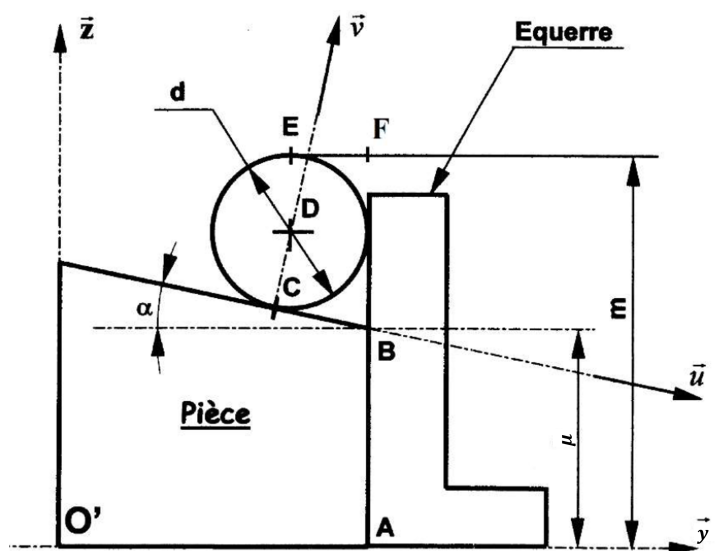
$$\vec{z}_2 \cdot \vec{x}_0 = \cos(\alpha) \sin(\psi).$$

2 | Mesure de métrologie

L'objectif est de vérifier, à partir d'une mise en place simple, la hauteur d'une pièce afin de vérifier sa conformité avec le cahier des charges.

Exigence	Critère	Niveau	Flexibilité
La hauteur de la pièce doit être de 35mm	Hauteur	35mm	$\pm 0,1mm$

Pour contrôler la cote μ de la pièce, on réalise le montage ci-contre. On place une équerre contre la face AB, et un cylindre (de rayon r et de diamètre d) sur le plan incliné. Puis on mesure la cote m à l'aide d'un pied à coulisse.

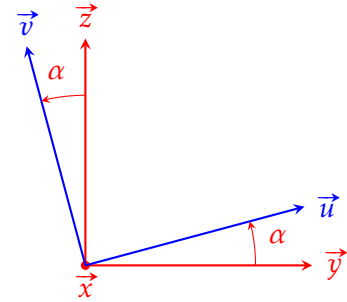


On note $\lambda = CB$ qui est une dimension inconnue. Tous les vecteurs définis ci-contre sont unitaires. Le plan incliné sur de dessus de la pièce forme un angle de 20° avec $\vec{y}$. On introduit $\alpha = (\vec{y}, \vec{u}) = -20^\circ$. Une fermeture géométrique donne : $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF} + \vec{FA} = \vec{0}$

Question 5 : Exprimer la relation vectorielle de la fermeture géométrique en faisant apparaître les données de l'énoncé et les vecteurs unitaires.

Réponse 5 : En lisant sur le schéma et en remplaçant, il vient : $\boxed{\mu \cdot \vec{z} - \lambda \vec{u} + r \vec{v} + r \vec{z} + r \vec{y} - m \cdot \vec{z} = \vec{0}}$.

Question 6 : Réaliser la ou les figure(s) de calcul puis déterminer deux équations scalaires à partir de cette relation vectorielle.



Réponse 6 : La figure de calcul (ou de changement de base, ou...) est

Soit on réalise le produit scalaire entre l'équation vectorielle précédente avec $\vec{y}$ et $\vec{z}$ afin de déterminer les deux équations scalaires, soit on décompose les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ avant de réaliser ces mêmes produits scalaires. Cela revient tout à fait au même et il vient :

$$\begin{cases} \vec{y} / -\lambda \cos \alpha - r \sin \alpha + r = 0 \\ \vec{z} / \mu - \lambda \sin \alpha + r \cos \alpha + r - m = 0 \end{cases}$$

Question 7 : En déduire μ en fonction de m , r et α .

Réponse 7 : λ est une inconnue non recherchée. On commence par isoler les termes en λ . Il s'agit d'une longueur, on effectue le rapport des deux équations scalaires afin de l'éliminer. On peut également raisonner par substitution.

Via le rapport il vient :

$$\tan \alpha = \frac{\mu + r \cos \alpha + r - m}{r(1 - \sin \alpha)} \text{ soit } \boxed{\mu = m - r(1 + \cos \alpha) + r(1 - \sin \alpha) \tan \alpha} \text{ avec } \alpha \neq \frac{\pi}{2} [\pi].$$

Via substitution, on a :

$$\lambda = \frac{r(1 - \sin \alpha)}{\cos \alpha} \text{ et on retrouve bien } \boxed{\mu = m - r(1 + \cos \alpha) + r(1 - \sin \alpha) \tan \alpha} \text{ avec } \alpha \neq \frac{\pi}{2} [\pi].$$

Question 8 : Retrouver l'expression de μ en effectuant qu'un seul produit scalaire.

Réponse 8 : Afin d'éliminer λ il suffit de faire une projection suivant un vecteur orthogonal à $\vec{u}$, c'est à dire $\vec{v}$ car $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Ainsi l'équation vectorielle devient :

$$\mu \vec{z} \cdot \vec{v} - 0 + r + r \vec{z} \cdot \vec{v} + r \vec{y} \cdot \vec{v} - m \vec{z} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\text{D'où : } \cos \alpha (\mu + r - m) + r \sin \alpha + r = 0$$

Après manipulation et formules trigonométriques, on retrouve bien le même résultat.

Les mesures d'une pièce sont $r = 10 \text{ mm}$, $\alpha = -20^\circ$ et $m = 59,15 \text{ mm}$.

Question 9 : Cette pièce est elle conforme au cahier des charges ?

Réponse 9 : L'application numérique donne $\mu = 34,87 \text{ mm}$, le cahier des charges requiert une hauteur de $35 \text{ mm} \pm 0,1 \text{ mm}$. Or $34,87 < 34,99 \text{ mm}$ l'exigence n'est pas satisfaite, la pièce n'est pas conforme.

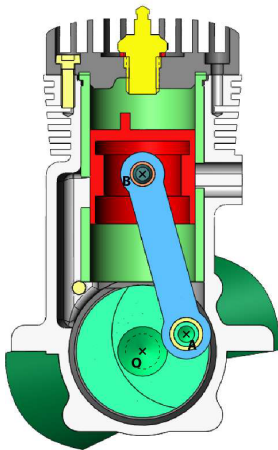
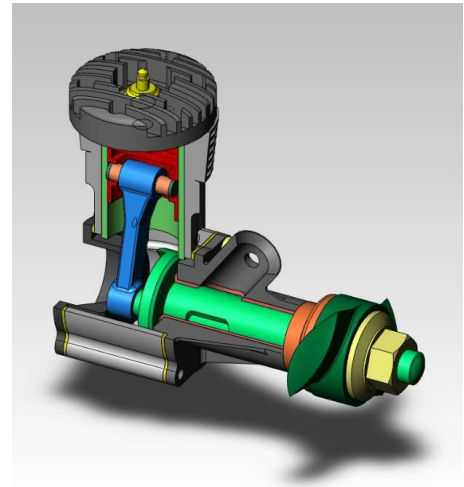
3 | Moteur deux temps

Le moteur de modélisme ci-contre est un moteur thermique monocylindre qui équipe des maquettes de bateaux.

Il s'agit d'un type de moteur thermique dont le cycle de fonctionnement n'a que deux temps. En effet, l'admission et le refoulement des gaz se fait en même temps et ce moteur ne possède pas de soupape.

Pour pouvoir réaliser le dimensionnement, on souhaite connaître la vitesse de translation du piston nécessaire pour obtenir une vitesse de rotation de l'hélice désirée.

L'exigence 1.4.1 nous donne la valeur maximale de translation du piston acceptable.



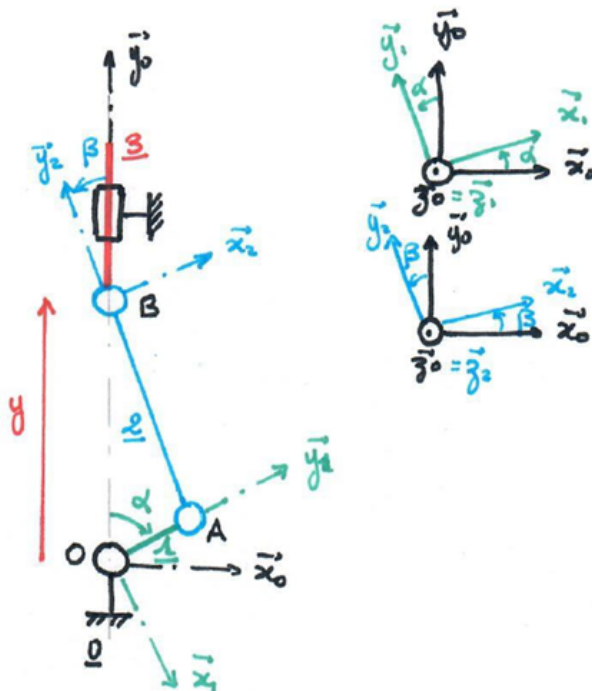
La bielle est présentée en bleue, le vilebrequin en vert clair et le piston en rouge. L'hélice et le vilebrequin font partis du même ensemble cinématique.

Données

- Longueur de la bielle : $L = 30\text{mm}$
- Excentrique du vilebrequin : $e = 8,5\text{mm}$
- Vitesse de rotation de l'hélice : $\omega_{\text{hélice}} = 5000\text{tr.min}^{-1}$

Id	Critère	Niveau
1.4.1	Vitesse de translation maximale du piston	5m.s^{-1}

Question 10 : Réaliser le schéma cinématique du système.



Réponse 10 :

Question 11 : Paramétrer le schéma puis réaliser les figures de changement de base. *C'est à dire*

ajouter les paramètres d'angle et de distance ainsi que les vecteurs des bases.

Réponse 11 : Le paramétrage est déjà partiellement présent sur le schéma cinématique précédent.

On note $\vec{OB} = \lambda \vec{y}_0$, $\alpha = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$, $\beta = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$.

L'énoncé donne $\vec{OA} = e \vec{y}_1$ et $\vec{AB} = L \vec{y}_2$.

Question 12 : Réaliser la fermeture géométrique avec les points O, A et B.

Réponse 12 : $\vec{OA} + \vec{AB} + \vec{BO} = \vec{0}$ soit $e \vec{y}_1 + L \vec{y}_2 - \lambda \vec{y}_0 = \vec{0}$.

Question 13 : En déduire deux équations scalaires puis exprimer la position du piston en fonction de l'angle de rotation du vilebrequin.

Réponse 13 : En projection sur la base B_0 :

$$\begin{cases} \vec{x}_0 / -e \sin \alpha - L \sin \beta = 0 \\ \vec{y}_0 / e \cos \alpha + L \cos \beta - \lambda = 0 \end{cases}$$

On souhaite éliminer β , pour cela on isole les termes avec β : $\begin{cases} \vec{x}_0 / L \sin \beta = -e \sin \alpha \\ \vec{y}_0 / L \cos \beta = -e \cos \alpha + \lambda \end{cases}$

En mettant les deux équations au carré puis en en faisant la somme :

$$L^2 = (e \sin \alpha)^2 + (\lambda - e \cos \alpha)^2$$

Puis en passant à la racine, il vient : $\lambda = \sqrt{L^2 - (e \sin \alpha)^2} + e \cos \alpha$.

Question 14 : Déterminer la vitesse de translation du piston en fonction de la vitesse de rotation désirée de l'hélice.

Réponse 14 : Il suffit de dériver l'expression par rapport au temps :

$$\dot{\lambda} = \frac{-e^2 \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{L^2 - (e \sin \alpha)^2}} - e \dot{\alpha} \sin \alpha$$

Question 15 : L'exigence est elle satisfaite si on considère que e est négligeable devant L ?

Réponse 15 : Si $e \ll L$ alors $L^2 - (e \sin \alpha)^2 \simeq L^2$. Ainsi :

$$\frac{-e^2 \dot{\alpha} \cos \alpha \sin \alpha}{\sqrt{L^2 - (e \sin \alpha)^2}} - e \dot{\alpha} \sin \alpha \simeq -e \dot{\alpha} \sin \alpha \left(\frac{e \cos \alpha}{L} + 1 \right) \simeq -e \dot{\alpha} \sin \alpha$$

$$\text{D'où } \dot{\lambda} = -e \dot{\alpha} \sin \alpha$$

Application numérique :

$$\|\dot{\lambda}\| = 8,5 \cdot 10^{-3} (m) \times 5000 \frac{2\pi}{60} (rad.s^{-1}) \times \sin \alpha = 4,4 m.s^{-1} \times \sin \alpha \leq 4,4 m.s^{-1}$$

Ce qui est bien inférieur aux $5 m.s^{-1}$ du cahier des charges ; l'exigence 1.4.1 est satisfaite.