Modélisation du comportement dynamique d'un système

1 | Hypothèses de modélisation

Dans le cadre des systèmes de commande, un modèle est une représentation mathématique du comportement du système permettant de prévoir l'évolution de sorties au cours du temps pour une entrée donnée.
Le modèle permet, lors de la phase de conception d'un produit, de valider ses performances dans diverses situations et d'élaborer des lois de commande assurant les meilleures performances possibles.

Un modèle est nécessairement une représentation simplifiée de la réalité.

Nous nous intéressons dans le cadre du programme aux **systèmes linéaires, continus, invariants**. Ces hypothèses raisonnables permettent la résolution analytique du problème.

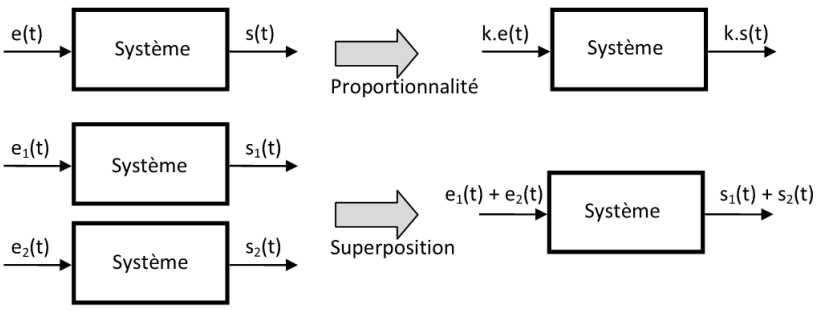
1.1 Système linéaire

Définition

Système linéaire

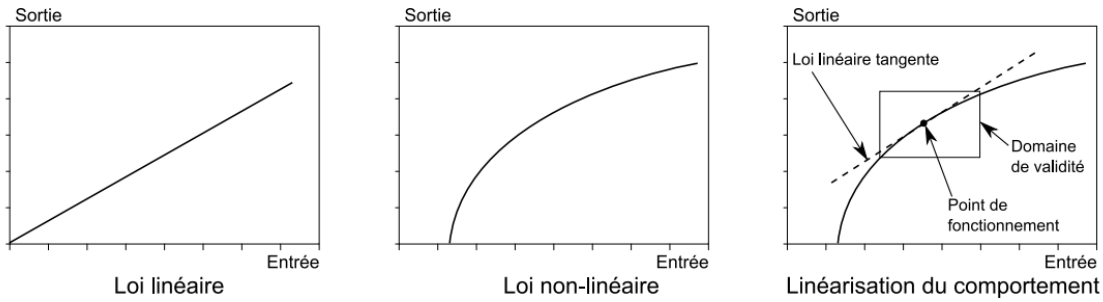
Un système est dit linéaire si la fonction qui décrit son comportement est elle-même linéaire. Cette dernière vérifie alors le principe de proportionnalité et de superposition.

Si le système est linéaire on obtient, en traçant la réponse $s(t)$ en fonction de $e(t)$ (pour un instant donné ou en régime permanent), la caractéristique du système égale à une droite de pente K (gain du système).



Remarque : Attention à **ne pas confondre** la courbe **sortie fonction de l'entrée** avec la courbe **sortie fonction du temps** qui, elle, est très souvent non linéaire.

La plupart des systèmes physiques ne sont pas linéaires sur la totalité de leur domaine d'application. Cependant, lorsque le système est utilisé dans une **zone réduite** du domaine d'application, il est possible de **linéariser la réponse** du système dans cette zone.



1.2 Système continu

Définition

Système continu

Un système est **continu**, par opposition à un système discret, lorsque les variations des grandeurs physiques sont **définies à chaque instant**.

Un système continu est caractérisé par une **fonction continue**. On parle aussi dans ce cas de **système analogique**.

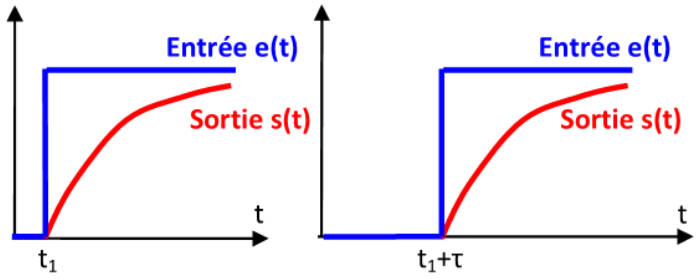
1.3 Système invariant

Définition

Système invariant

Un système est dit invariant si les **caractéristiques du système** (masse, dimension, résistance, etc.) **ne varient pas au cours du temps**. Autrement dit, le système ne "vieillit" pas.

Pour un système invariant, si une même entrée se produit à deux instants distincts (t_1 et $t_2 = t_1 + \tau$), alors les deux sorties temporelles ($s_1(t)$ et $s_2(t)$) seront identiques.



1.4 Conséquences sur le modèle

Un système linéaire continu invariant peut être représenté par une **équation différentielle à coefficients constants** :

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds}{dt}(t) + \cdots + a_d \frac{d^d s}{dt^d}(t) = b_0 e(t) + b_1 \frac{de}{dt}(t) + \cdots + b_n \frac{d^n e}{dt^n}(t)$$

Pour que le système soit physiquement réalisable, on a nécessairement $n \leq d$.

- En effet, tant que $n \leq d$ la **sortie** à l'instant t_i **dépend de l'entrée aux instants précédents ou actuel** $t_i, t_{i-1}, \ldots$. On dit que le système est **causal** (physiquement réalisable).
- En revanche, si $n > d$ la **sortie** à l'instant t_n **dépend d'une valeur future de l'entrée** $t_{i+1}, t_{i+2} \ldots$. On dit que le système est **acausal** ou **non causal**.

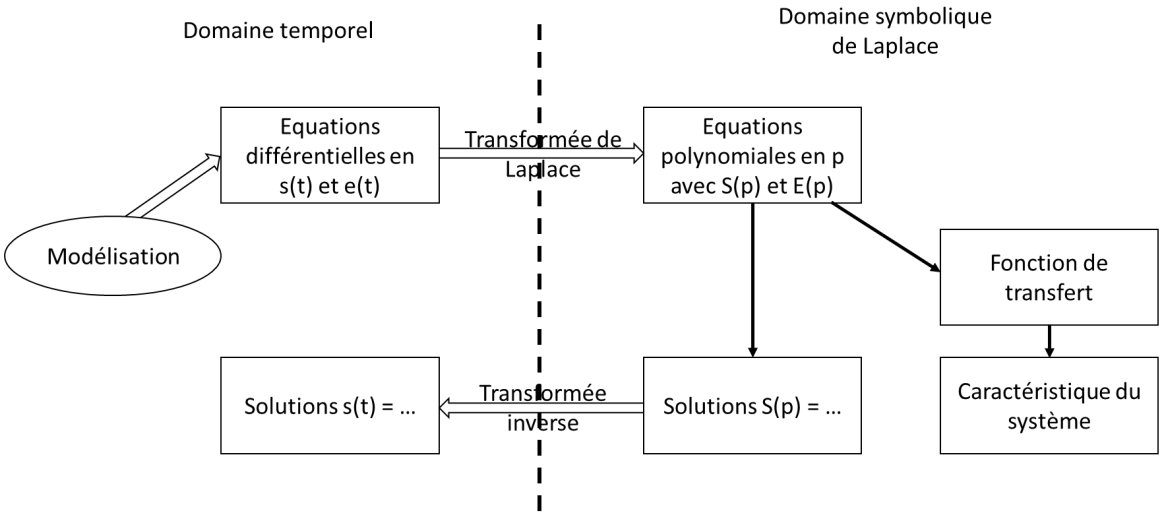
Il est très utile de représenter un **système complexe** en un schéma-bloc fonctionnel et de le **décomposer** en sous-systèmes élémentaires plus simples, car cette stratégie permet de retrouver souvent des modèles de comportement bien connus pour chaque sous-système élémentaire.

Résoudre les équations différentielles n'est pas toujours simple à réaliser (cf. cours de maths). En SI, on utilisera la **transformée de Laplace** qui permet d'obtenir des informations sur la **stabilité, la précision, la rapidité et le dépassement du système** et même de déterminer la réponse temporelle du système **sans résoudre explicitement l'équation différentielle** [1].

1. Ce qui est bien plus simple qu'en mathématiques. Par contre, on ne peut s'en servir que dans les hypothèses des SLCI, ce qui n'est pas toujours le cas des fonctions en mathématiques. Autrement dit, il s'agit d'une méthode beaucoup plus simple mais qui nécessite certaines hypothèses.

2 | Outil : la transformée de Laplace

La transformée de Laplace est une application mathématique permettant d'exprimer une fonction temporelle dans un domaine virtuel, le **domaine de Laplace**, où la manipulation des expressions sera bien plus simple. Il s'agit en priorité de **savoir utiliser l'outil** afin de modéliser les systèmes. La méthode globale est la suivante :



Soit $f \mapsto f(t)$, une fonction temporelle représentant généralement un signal ou une grandeur physique évoluant au cours du temps. Soit $F(p)$ la transformée de Laplace de $f(t)$, où p est **la variable de Laplace** [2].

On note la transformée de Laplace $F(p) = \mathcal{L}\Big(f(t)\Big)$ et la transformée inverse est notée $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\Big(F(p)\Big)$. L'expression de la transformée est :

$$\mathcal{L}\Big(f(t)\Big) = F(p) = \int_{t=0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt \qquad \text{avec } p \in \mathbb{C} \text{ et } t \in \mathbb{R}$$

Si les **conditions de Heaviside** sont respectées, c'est-à-dire si les **conditions initiales sont nulles** :

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = pF(p)$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) &= \int_{t=0}^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt}\,dt \\
&= \Big[f(t)e^{-pt}\Big]_0^{+\infty} - \int_{t=0}^{+\infty} f(t)(-p)e^{-pt}\,dt \quad \text{par Intégration Par Partie} \\
&= 0 + p\int_{t=0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt \\
&= pF(p)
\end{aligned}$$

2. p est parfois noté s, en particulier dans la littérature anglo-saxonne et dans certains logiciels comme Scilab.

Dériver dans le domaine temporel revient à multiplier par p dans le domaine de Laplace.
Ainsi l'équation différentielle d'un système

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 s(t)}{dt^2} = b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt}$$

se transforme en :

$$(a_0 + a_1 p + a_2 p^2) S(p) = (b_0 + b_1 p) E(p)$$

Les systèmes complexes sont composés de plusieurs composants dont les comportements sont modélisés par des **équations différentielles**. La **transformée de Laplace** permet de combiner efficacement les équations **sous forme polynomiale**.

2.1 Propriétés et théorèmes

Linéarité :

$$\mathcal{L}\Big(\lambda f(t) + \mu g(t)\Big) = \lambda F(p) + \mu G(p) \qquad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Transformée d'une dérivée :

$$\mathcal{L}\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = pF(p)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right) = p^2 F(p)$$

Transformée d'une intégrale dans les conditions d'Heaviside (analogue à la dérivation) :

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(t)\,dt\right) = \frac{F(p)}{p}$$

Théorème de la valeur initiale (TVI) :

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{p \to +\infty} pF(p)$$

Théorème de la valeur finale (TVF) :

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = \lim_{p \to 0} pF(p)$$

Théorème du retard :
Soit $f(t)$ une fonction dont la transformée de Laplace existe, $f(t-T)$ est la même fonction, mais décalée (retardée) d'un temps T.

$$\mathcal{L}\Big(f(t-T)\Big) = e^{-Tp} F(p)$$

Remarques :

- On utilisera les théorèmes des valeurs finale et initiale lorsqu'on veut obtenir des **informations aux limites** sur la **fonction temporelle** $f(t)$ **sans** déterminer la **transformée inverse** de $F(p)$. Ce qui est **très fréquent**.
- Ne surtout pas oublier la **multiplicaiton par** p dans les théorèmes des valeurs initiale et finale...
- De manière usuelle, les fonctions dans le domaine de Laplace sont notée avec des majuscules.

3 | Notion de fonction de transfert

Définition

Fonction de transfert

La **fonction de transfert** ou **transmittance** est la fonction $H(p)$, définie par le rapport de l'image de la sortie sur l'image de l'entrée, toutes deux exprimées dans le domaine symbolique de Laplace :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

$H(p)$ représente le comportement du système indépendamment du signal d'entrée.

3.1 Exemple : Moteur à courant continu





Les équations de la physique permettent de modéliser une partie du comportement d'un moteur à courant continu par l'équation différentielle suivante :

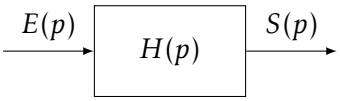
$$\omega(t) + \tau \frac{d\omega}{dt}(t) = K_m u_m(t)$$

Question 1 : Déterminer la fonction de transfert du moteur à courant continu.
Réponse 1 : Dériver dans le domaine temporel revient à multiplier par p dans le domaine de Laplace ; on passe les notations en majuscule :

$$\Omega(p) + \tau p\,\Omega(p) = K_m U_m(p) \iff \frac{\Omega(p)}{U_m(p)} = \frac{K_m}{1+\tau p}$$

3.2 Généralisation

La relation entre les grandeurs physiques dans le domaine de Laplace peut être décrite sous forme de schéma-bloc :



$H(p)$ s'écrit sous la forme d'un **quotient de deux polynômes**. On appelle **pôles** les racines du dénominateur et **zéros** les racines du numérateur.

$$H(p) = \frac{a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + \cdots + b_d p^d}$$

La **forme canonique** consiste à imposer le premier coefficient (celui en p^0) unitaire, elle est utile entre autres pour déterminer les performances d'un système. Ainsi sa forme est :

$$\boxed{H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + a'_1 p + \cdots + a'_{n'} p^{n'}}{1 + b'_1 p + \cdots + b'_{d'} p^{d'}} = \frac{K}{p^\alpha} \frac{N(p)}{D(p)}}$$

Avec $N(p)$ et $D(p)$ des polynômes quelconques avec $N(0) = D(0) = 1$.

K est le gain statique de la fonction de transfert, α la classe du système et $d = d' + \alpha$ l'ordre du système.

Question 2 : Pour les fonctions suivantes, déterminer le gain, l'ordre et la classe.

$$H_1(p) = \frac{8}{1+2p} \qquad H_2(p) = \frac{1+2,6p}{1+3,4p} \qquad H_3(p) = \frac{1+3p}{(1+5p)p}$$

$$H_4(p) = \frac{2}{p+6p^2} \qquad H_5(p) = \frac{12}{(1+3p)(1+6p)} \qquad H_6(p) = \frac{10p}{p(5+p)}$$

Réponse 2 : Pour cela, on met sous forme canonique puis on identifie.

Fonction et mise sous forme canonique	**Gain K**	**Ordre**	**Classe α**
$H_1(p) = \frac{8}{1+2p}$ (rien à faire)	8	1	0
$H_2(p) = \frac{1+2,6p}{1+3,4p}$ (rien à faire)	1	1	0
$H_3(p) = \frac{1+3p}{p(1+5p)} = \frac{1}{p}\frac{1+3p}{1+5p}$	1	2	1
$H_4(p) = \frac{2}{p+6p^2} = \frac{2}{p}\frac{1}{1+6p}$	2	2	1
$H_5(p) = \frac{12}{(1+3p)(1+6p)} = 12\frac{1}{1+9p+18p^2}$	12	2	0
$H_6(p) = \frac{10p}{p(5+p)} = \frac{10}{5+p} = \frac{2}{1+0,2p}$	2	1	0

4 | Modélisation par schéma-blocs

La modélisation par schéma-blocs est très proche de la représentation schématique vue au chapitre précédent.

4.1 Éléments de base

Un schéma-bloc est une représentation graphique d'un système d'équations différentielles liant des grandeurs physiques.

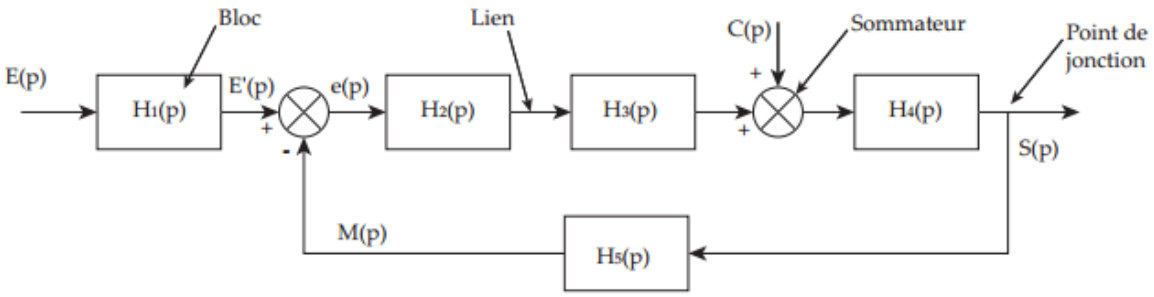
Chaque bloc représente une équation et chaque lien représente une grandeur physique.

Le schéma-bloc est un outil pour **aider à obtenir la fonction de transfert globale du système** à partir des fonctions de transfert des différents constituants du système. La fonction de transfert globale engendre un comportement « mathématique » équivalent à celui du système ce qui permet de valider les performances du système mais éloigne le modèle de sa réalité structurelle.
Les blocs peuvent représenter l'équation de comportement d'un composant ou d'un phénomène physique (l'équation décrivant le principe fondamental de la dynamique par exemple).

La modélisation d'un système sous forme de schéma-blocs consiste à :

- définir la **consigne** et la **sortie** du système ainsi que les **perturbations** qui peuvent s'appliquer au système ;
- **décomposer** le système en composants élémentaires (schéma-bloc fonctionnel) et déterminer les **équations physiques** qui les caractérisent ;
- traduire les équations physiques **sous forme de schéma-bloc**.

Les blocs : ils contiennent une fonction de transfert caractérisant la relation entre l'entrée et la sortie.

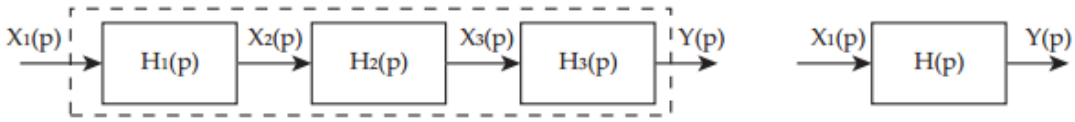


Les liens : ils représentent une grandeur dans le domaine de Laplace.
Les sommateurs ou comparateur : ils additionnent (ou soustraient suivant les signes) les différentes entrées. Ils ne peuvent avoir qu'une sortie.
Les points de prélèvement : une jonction permet de transmettre une grandeur en entrée de plusieurs blocs ou sommateurs.

4.2 Associations de blocs

4.2.1 Association de blocs en série

Question 3 : Déterminer l'équivalence entre ces deux schéma-blocs.



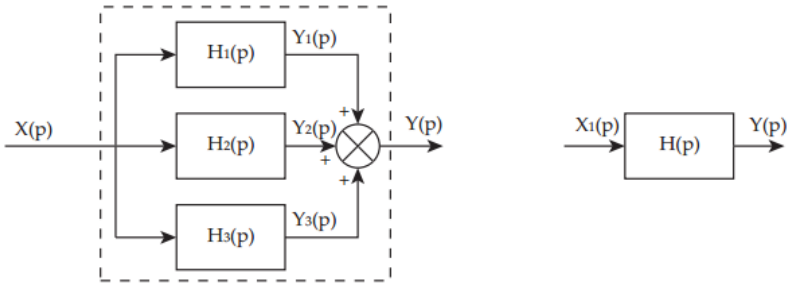
$$\left.\begin{aligned} X_2(p) &= H_1(p)X_1(p) \\ X_3(p) &= H_2(p)X_2(p) \\ Y(p) &= H_3(p)X_3(p) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow Y(p) = H_1(p)H_2(p)H_3(p)X_1(p)$$

La fonction de transfert globale de **blocs en série** s'écrit donc :

$$H(p) = H_1(p)H_2(p)H_3(p)$$

4.2.2 Association de blocs en parallèle

Question 4 : Déterminer l'équivalence entre ces deux schéma-blocs.



$$\left.\begin{array}{l} Y_1(p) = H_1(p)X(p) \\ Y_2(p) = H_2(p)X(p) \\ Y_3(p) = H_3(p)X(p) \end{array}\right\} \Longrightarrow Y(p) = \Big[H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)\Big]X(p)$$

La fonction de transfert globale de **blocs en parallèle** s'écrit donc :

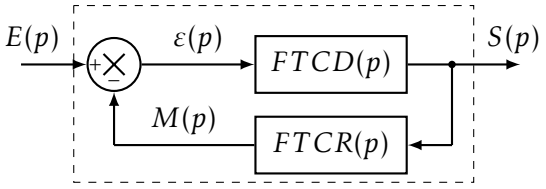
$$H(p) = H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)$$

4.3 Fonctions de transfert globales (FTBF et FTBO)

4.3.1 Fonction de transfert en boucle fermée (FTBF)

Les systèmes asservis étudiés sont généralement représentables par un **schéma-bloc bouclé**. Pour étudier les **performances de ce système**, il est nécessaire de déterminer la **fonction de transfert globale**. Celle-ci est appelée **fonction de transfert en boucle fermée** (attention au +/− dans le comparateur !) :

$$\mathbf{FTBF}(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$



$FTCD(p)$ est généralement dénommée **chaîne directe** tandis que $FTCR(p)$ est dénommée **chaîne de retour**. La **formule de Black** donne :

$$\boxed{\mathbf{FTBF}(p) = \frac{FTCD(p)}{1 + FTCD(p)FTCR(p)}}$$

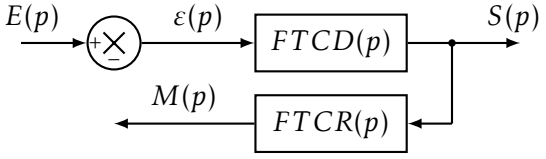
Démonstration :

$$\begin{aligned} S(p) &= FTCD(p)\varepsilon(p) \\ S(p) &= FTCD(p)\Big(E(p) - M(p)\Big) \\ S(p) &= FTCD(p)\Big(E(p) - FTCR(p)S(p)\Big) \\ S(p)\Big(1 + FTCR(p)FTCD(p)\Big) &= FTCD(p)E(p) \\ \frac{S(p)}{E(p)} &= \frac{FTCD(p)}{1 + FTCD(p)FTCR(p)} \end{aligned}$$

4.3.2 Fonction de transfert en boucle ouverte

La fonction de transfert en boucle ouverte est définie comme la fonction de transfert du système d'entrée ε, **lorsque le retour sur le sommateur est coupé**. Elle comprend la chaîne directe $FTCD(p)$ et la chaîne de retour $FTCR(p)$.

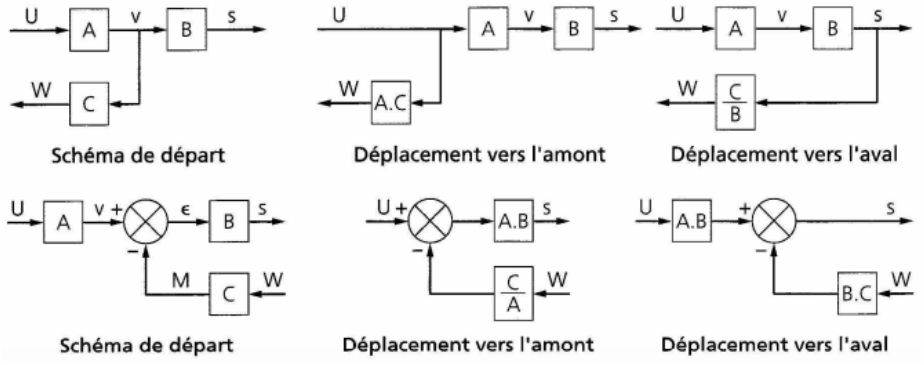
$$\boxed{\mathbf{FTBO}(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)} = FTCD(p)FTCR(p)}$$



Remarque : La **formule de Black** peut alors s'écrire $FTBF(p) = \dfrac{FTCD(p)}{1 + FTBO(p)}$.

4.4 Modification de schéma-blocs

Les schémas blocs peuvent être modifiés pour être capable de calculer la fonction de transfert globale à l'aide de la formule de Black. Les opérations simples de modifications de schéma-blocs à connaître ou à savoir faire sont les suivantes :



Remarque : Les schéma-blocs représentent des équations, on peut les manipuler tant que le nouveau schéma-bloc représente toujours la même équation !