



TD02-bonus - correction

1 | Quille pendulaire de bateau

Le comportement dynamique d'un Imoca 60 (bateau du Vendée globe) est conditionné par ses interactions avec les deux fluides avec lesquels il est en contact : l'air et l'eau. Il flotte sur l'eau grâce à la poussée d'Archimède qui agit sur la coque et il avance grâce à l'action aérodynamique de l'air sur les voiles. Ces actions aérodynamiques provoquent aussi son inclinaison autour de son axe longitudinal (axe de direction $\vec{z}_N$ sur Figure 1), c'est le phénomène de gîte.

Pour contrebalancer ce mouvement et éviter que le voilier ne se couche sur l'eau, on utilise une quille qui joue le rôle de contrepoids. Cette quille est généralement constituée d'un voile en acier ou titane immergé dans l'eau à l'extrémité duquel se trouve un lest profilé. Son efficacité dépend de la masse du lest et de la longueur du voile de quille. Ces deux paramètres présentent cependant des limitations : le lest ne peut être trop important sous peine de solliciter dangereusement le voile de quille et la longueur de quille est limitée par le tirant d'eau maximal admissible (il faut permettre l'entrée dans les ports sans toucher le fond).

Une quille pendulaire s'oriente latéralement jusqu'à environ 45° . Cette quille est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_N)$ avec la coque du navire et peut ainsi être orientée d'un côté ou de l'autre du navire. Une fois l'orientation désirée obtenue, tout mouvement dans la liaison pivot est supprimé par un blocage en rotation.

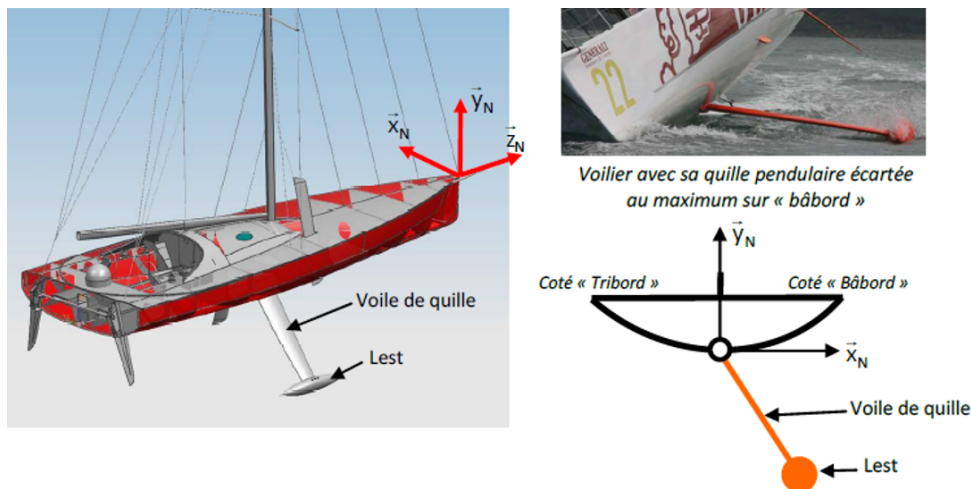


FIGURE 1 – Quille pendulaire de bateau Imoca 60

L'objectif est de valider les performances cinématiques de ce système de quille pendulaire dont on donne une description structurale ainsi qu'un extrait de cahier des charges.

Exigences	Critères	Niveaux
Angle d'inclinaison	Angle d'inclinaison maximal de la quille/coque	$\theta_{1,max} = \pm 45^\circ$
Vérins	Course maximale des vérins	$< 1,6m$
Accélération	Accélération maximale du centre de gravité du lest	$< 5.10^{-3} m.s^{-2}$

1.1 Mise en évidence de l'intérêt d'une quille pendulaire

On considère le navire à l'arrêt et en équilibre sur un plan d'eau au repos (Figure 2 gauche).

Il est soumis :

- à l'action mécanique de pesanteur modélisée ici par le poids P appliqué en G , centre de gravité du navire;
- à l'action mécanique de l'eau sur la coque modélisée par la force appelée « Poussée d'Archimède » appliquée en C , centre de carène du navire.

Une cause extérieure représentée comme l'effet du vent sur les voiles ou des vagues sur la coque, provoque la gîte du navire caractérisée par l'angle de gîte α (Figure 2 droite).

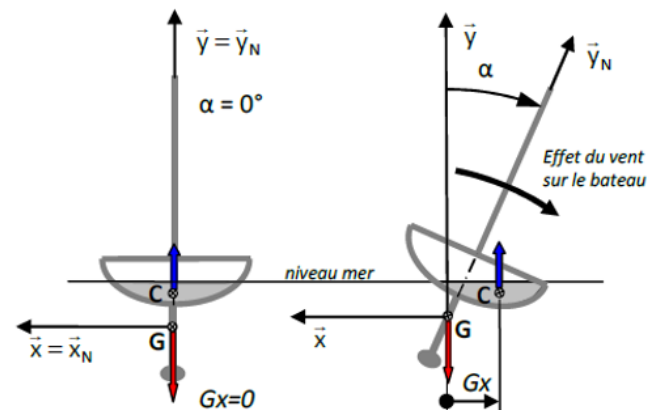


FIGURE 2 – Modélisation d'actions mécaniques sur la quille

Un nouvel équilibre est alors obtenu sous l'effet des deux actions mécaniques précédentes, le poids et la poussée d'Archimède, ainsi que l'action mécanique extérieure causant le gîte.

Question 1 : Le document réponse 1 donne la courbe de stabilité théorique du voilier à quille non pendulaire (quille fixe par rapport à la coque). Pour chaque point d'équilibre, repéré sur la courbe de A à F, remplir dans le tableau le numéro de la figure correspondant à la position d'équilibre correspondant.

Réponse 1 :

Point d'équilibre	Numéro de figure correspondant
A	4
B	3
C	1
D	6
E	5
F	2

1.2 Validation des performances cinématiques

Modélisation et hypothèses

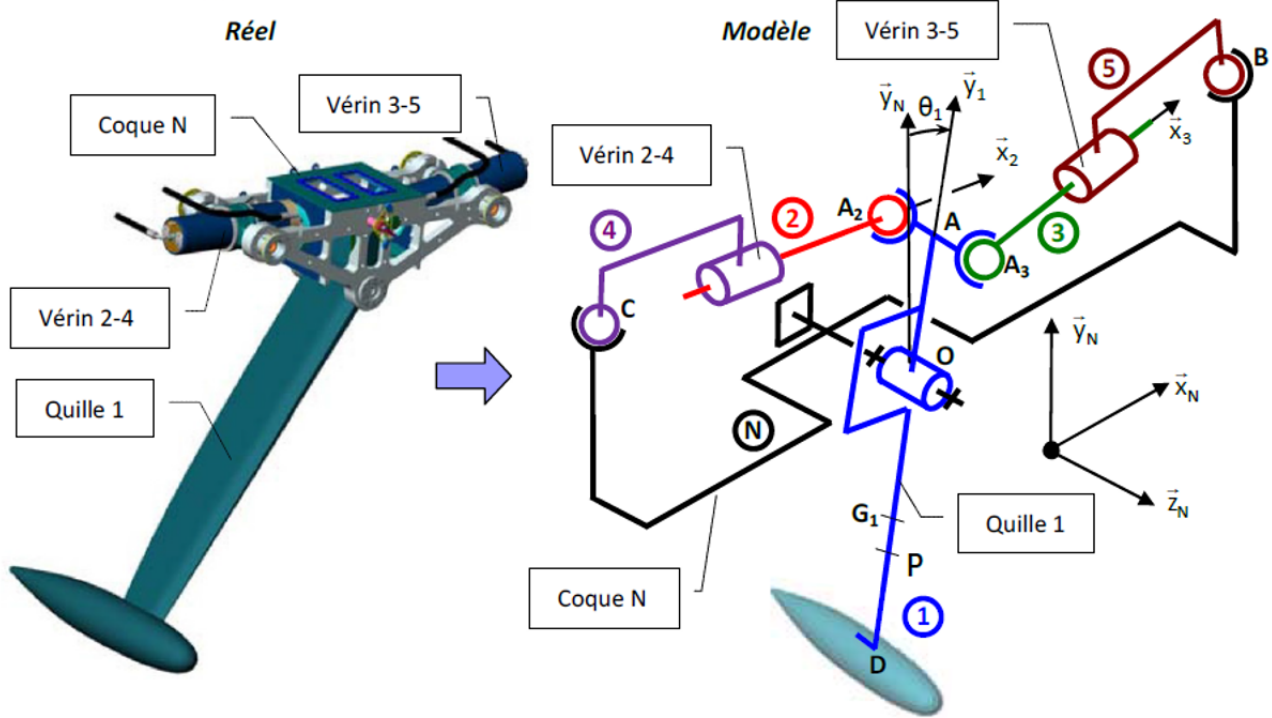


FIGURE 3 – Schéma cinématique du système de quille pendulaire

On considère sur ce modèle que la quille 1 est en liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_N)$ par rapport à la coque N du bateau. Cette quille est mise en mouvement par l'intermédiaire de deux vérins notés 2-4 et 3-5. Le vérin 2—4 est constitué d'un corps de vérin 4 en liaison rotule avec la coque N au point C et d'une tige 2 en liaison rotule avec la quille 1 en A_2 . La tige 2 est en liaison pivot glissant d'axe $(C, \vec{x}_2)$ par rapport au corps de vérin 4. Le vérin 3—5 est constitué d'un corps de vérin 5 en liaison rotule avec la coque N au point B et d'une tige 3 en liaison rotule avec la quille 1 en A_3 . La tige 3 est en liaison pivot glissant d'axe $(B, \vec{x}_3)$ par rapport au corps de vérin 5.

On considérera que les vitesses angulaires de rotation des mouvements de 2/4 et de 3/5 sont nulles.

$\mathcal{R}_N(O, \vec{x}_N, \vec{y}_N, \vec{z}_N)$ repère lié à la coque du bateau considérée comme un bâti, il est supposé galiléen.

$\mathcal{R}_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ repère lié à la quille tel que $\theta_1 = (\vec{x}_N, \vec{x}_1) = (\vec{y}_N, \vec{y}_1)$.

$\mathcal{R}_2(C, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ repère lié au vérin 2-4 tel que $\theta_2 = (\vec{x}_N, \vec{x}_2 = \vec{x}_4) = (\vec{y}_N, \vec{y}_2 = \vec{y}_4)$.

$\mathcal{R}_3(C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_3)$ repère lié au vérin 3-5 tel que $\theta_3 = (\vec{x}_N, \vec{x}_3 = \vec{x}_5) = (\vec{y}_N, \vec{y}_3 = \vec{y}_5)$.

$$\begin{array}{llll} \overrightarrow{OA} = R\vec{y}_1 & \overrightarrow{AA_2} = -d\vec{z}_N & \overrightarrow{AA_3} = d\vec{z}_N & \overrightarrow{OC} = -a\vec{x}_N + b\vec{y}_N - d\vec{z}_N \quad \overrightarrow{DO} = L_{t1}\vec{y}_1 \\ \overrightarrow{OG_1} = -L_1\vec{y}_1 & \overrightarrow{CA_2} = x_{24}(t)\vec{x}_2 & \overrightarrow{OB} = a\vec{x}_N + b\vec{y}_N + d\vec{z}_N & \overrightarrow{A_3B} = x_{35}(t)\vec{x}_3 \end{array}$$

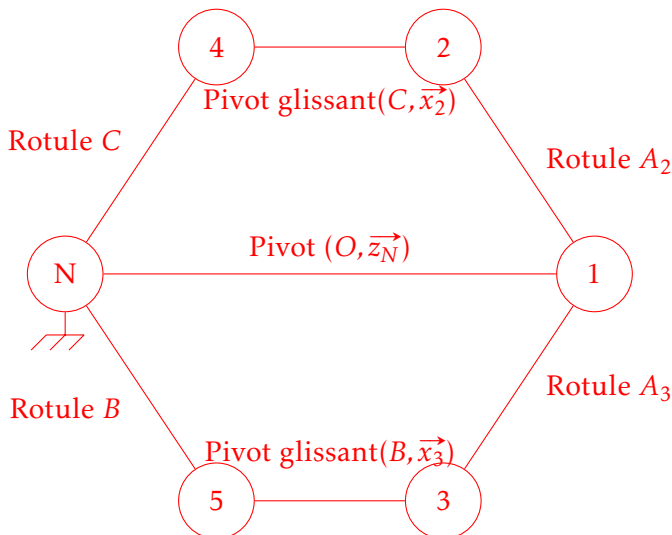
Données : $L_{t1} = 4,5m$; $a = 1,5m$; $b = R = 1m$; $L_1 = 3,5m$; $d > 0$

Question 2 : Donner le ou les paramètre(s) géométrique(s) d'entrée qui permet(tent) de piloter le mouvement de la quille et celui de sortie.

Réponse 2 : Les paramètres d'entrées sont les distances $\overrightarrow{A_3B} = x_{35}(t)\vec{x}_3$ et $\overrightarrow{CA_2} = x_{24}(t)\vec{x}_2$
Le paramètre de sortie est θ_1 .

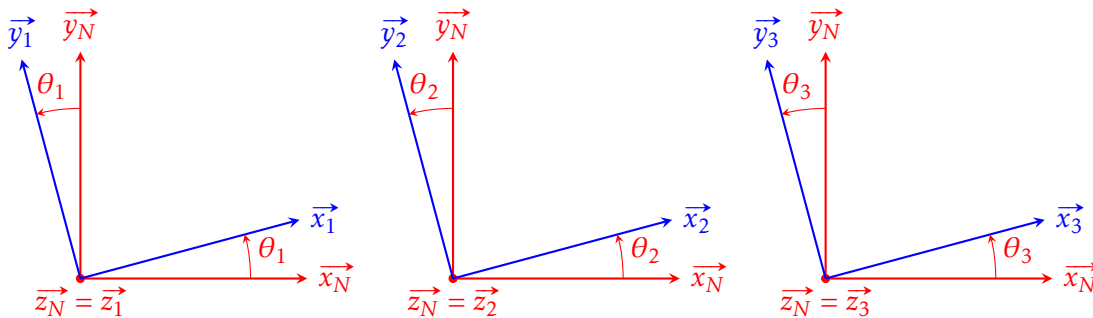
Question 3 : Réaliser le graphe de liaison correspondant à la modélisation représentée par la Figure 3.

Réponse 3 : Le graphe de liaison est le suivant :



Question 4 : Établir la ou les figure(s) de calcul représentant le paramétrage angulaire.

Réponse 4 : Les figures de changement de base sont :



Question 5 : Écrire l'équation vectorielle correspondant à la fermeture de chaîne reliant les points O, C, A₂ et A. La projeter ensuite dans la base $\mathcal{B}_N$.

Réponse 5 : La fermeture géométrique donne : $\vec{0} = \vec{OC} + \vec{CA_2} + \vec{A_2A} + \vec{AO}$ soit

$$\vec{0} = -a\vec{x}_N + b\vec{y}_N - d\vec{z}_N + x_{24}(t)\vec{x}_2 + d\vec{z}_N - R\vec{y}_1$$

Dans la base $\mathcal{B}_N$:

- $\vec{x}_N : -a + x_{24} \cos(\theta_2) + R \sin(\theta_1) = 0$
- $\vec{y}_N : b + x_{24} \sin(\theta_2) - R \cos(\theta_1) = 0$

Question 6 : A partir des résultats de la question précédente, déterminer la relation entre x_{24} et θ_1 . Faire l'application numérique pour la configuration inclinaison maximale.

Réponse 6 : On cherche à éliminer θ_2 , pour cela on l'isole dans les deux équations et on élève au carré. En faisant la somme des deux équations ainsi obtenues, il vient :

$$x_{24}^2 = (a - R \sin(\theta_1))^2 + (R \cos(\theta_1) - b)^2$$

Pour $\theta_1 = 45^\circ$ (inclinaison max) on a $x_{24} = 0,845m$.

Question 7 : A partir d'une fermeture géométrique de votre choix, déterminer la relation entre x_{35} et θ_1 . Faire l'application numérique pour la configuration inclinaison maximale.

Réponse 7 : La fermeture géométrique donne : $\vec{0} = \vec{OB} + \vec{BA_3} + \vec{A_3A} + \vec{AO}$ soit dans la base $\mathcal{B}_N$:

- $\vec{x}_N : a - x_{35} \cos(\theta_3) + R \sin(\theta_1) = 0$
- $\vec{y}_N : b - x_{35} \sin(\theta_3) - R \cos(\theta_1) = 0$

On cherche à éliminer θ_3 , pour cela on l'isole dans les deux équations et on élève au carré. En faisant la somme des deux équations ainsi obtenues, il vient :

$$x_{35}^2 = (a + R \sin(\theta_1))^2 + (b - R \cos(\theta_1))^2$$

Pour $\theta_1 = 45^\circ$ on a $x_{35} = 2,226m$.

Question 8 : En remarquant que le système est symétrique, déterminer la course totale des vérins

permettant d'assurer l'inclinaison maximale de la quille et conclure vis à vis du cahier des charges.

Réponse 8 : La course est $C_v = x_{max} - x_{min}$ soit $C_v = 2,226 - 0,845$.

D'où $C_v = 1,38m < 1,6m$, le cahier des charges est respecté.

Document Réponse 1 — Quille de bateau — Q. 1

