



Évaluation des performances d'un système asservi

Pour évaluer les performances d'un système en connaissant sa FTBF, il est possible, à l'aide de la transformée de Laplace inverse, de tracer la réponse temporelle du système. Néanmoins, **certaines performances** peuvent être étudiées **directement** grâce à la **fonction de transfert**, en boucle fermée ou en boucle ouverte.

1 Formalisme et propriétés de la transformée de Laplace

La transformée de Laplace constitue un outil mathématique largement utilisé en ingénierie pour les études des SLCI. Son utilisation permet :

- de **manipuler** aisément les **équations différentielles** de comportement des systèmes ;
- de **résoudre** facilement les **équations différentielles** pour des entrées simples ;
- d'obtenir les principales **performances** des systèmes **sans calculer la réponse temporelle**.

1.1 Rappel et définition

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(p) = \int_{t=0}^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad \text{avec } p \in \mathbb{C} \text{ et } t \in \mathbb{R}$$

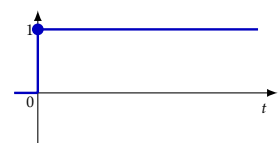
Conditions d'Heaviside : $f(0^+) = 0, \dots, \frac{d^n f}{dt^n}(0^+) = 0$.

1.2 Transformées de Laplace usuelles

1.2.1 Calcul pour l'échelon unitaire

Soit $u(t)$ l'échelon unitaire défini par :

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t \geq 0. \end{cases}$$



Question 1 : Déterminer la transformée de Laplace de l'échelon unitaire.

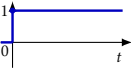
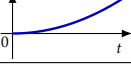
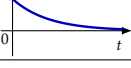
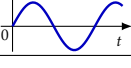
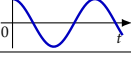
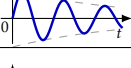
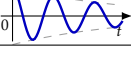
Remarque : Cette fonction est également appelée **fonction de Heaviside** ou **fonction indicielle**. Ainsi, une **réponse indicielle** fait référence à la réponse d'un système qui est sollicité par un échelon unitaire.

1.2.2 Calcul pour une fonction exponentielle

Question 2 : Déterminer la transformée de Laplace de la fonction exponentielle suivante.

$$f(t) = e^{-at}u(t)$$

Toutes les transformées de Laplace des **fonctions usuelles** sont regroupées dans le tableau suivant :

Allure	Fonction $f(t)$	Transformée de Laplace $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$	Pôles de $F(p)$
	$\delta(t)$ Impulsion de Dirac		N. A.
	$u(t)$ Échelon unitaire		0
	$tu(t)$ Rampe		0 double
	$t^n u(t)$ Fonction puissance	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	0 d'ordre $n + 1$
	$e^{-at} u(t)$ Exponentielle		$-a$
	$\sin(\omega t) u(t)$ Sinus	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$	$\pm j\omega$
	$\cos(\omega t) u(t)$ Cosinus	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$	$\pm j\omega$
	$e^{-at} \sin(\omega t) u(t)$ Sinus amorti	$\frac{\omega}{(p + a)^2 + \omega^2}$	$-a \pm j\omega$
	$e^{-at} \cos(\omega t) u(t)$ Cosinus amorti	$\frac{p + a}{(p + a)^2 + \omega^2}$	$-a \pm j\omega$

« j » est l'élément complexe tel que $j^2 = -1$.

Les transformées de Laplace usuelles les plus courantes sont à connaître.

1.2.3 Application

Question 3 : Déterminer la transformée de Laplace de $f(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)u(t)$ avec K et τ des réels strictement positifs.

1.3 Transformée de Laplace inverse

La transformée de Laplace étant **bijective** (propriété d'unicité), la **transformée inverse** existe et sera nécessaire pour **retrouver**, à partir de l'étude d'un système dans le domaine de Laplace, son **comportement temporel**, c'est à dire **l'évolution de la sortie en fonction du temps**.

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$$

Connaître la fonction de transfert $H(p)$ d'un système

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{a_0 + a_1 p + \dots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + \dots + b_d p^d}$$

permet de connaître la sortie $S(p)$ si l'entrée $E(p)$ est connue. La transformée inverse de Laplace permet de revenir à la sortie temporelle $s(t)$.

Remarques :

- Il ne faut pas mettre la fonction sous forme canonique pour trouver sa transformée inverse.
- Les transformées de Laplace inverses ne sont pas explicitement à connaître, mais il s'agit simplement de la transformée de Laplace dans le sens inverse...

Pour calculer analytiquement la transformée inverse $f(t)$ d'une fonction $F(p)$, on procédera généralement par **décomposition en éléments simples** de $F(p)$, puis par identification de ces éléments simples à des fonctions connues.

Exemple

Soit un système régi par l'équation différentielle :

$$6s(t) + 5 \frac{ds}{dt}(t) + \frac{d^2s}{dt^2}(t) = e(t)$$

avec $s(0) = 0$, $s'(0) = 0$ et $e(t) = 6u(t)$ où $u(t)$ est l'échelon indiciel.

Les conditions de Heaviside sont respectées, on peut donc écrire :

2 | Évaluation des performances à partir de la fonction de transfert

2.1 Stabilité

La stabilité est intrinsèque au système et est totalement indépendante du type d'entrée auquel il est soumis.

Définition

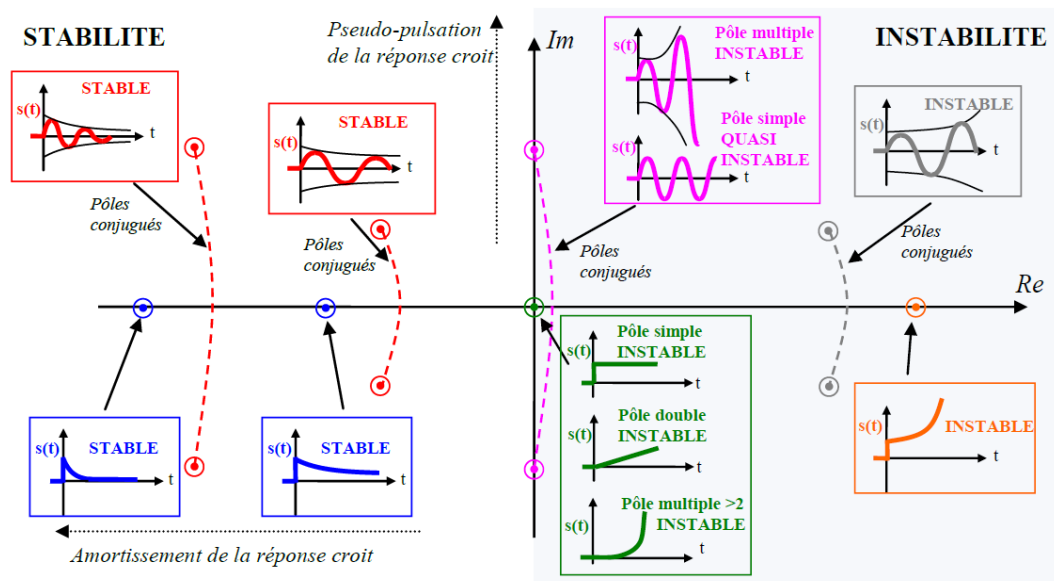
Critère de stabilité

Un système est **stable** si **tous les pôles** de sa fonction de transfert en **boucle fermée** sont à **partie réelle strictement négative**.

On retiendra que cette condition est respectée dès lors que les signes des coefficients du dénominateur sont identiques.

Remarque : Bien que sa réponse à l'impulsion soit stable, un intégrateur pur $\frac{1}{p}$ (pôle nul) est tout de même considéré comme un système instable puisqu'une entrée en échelon conduit à une sortie en rampe.

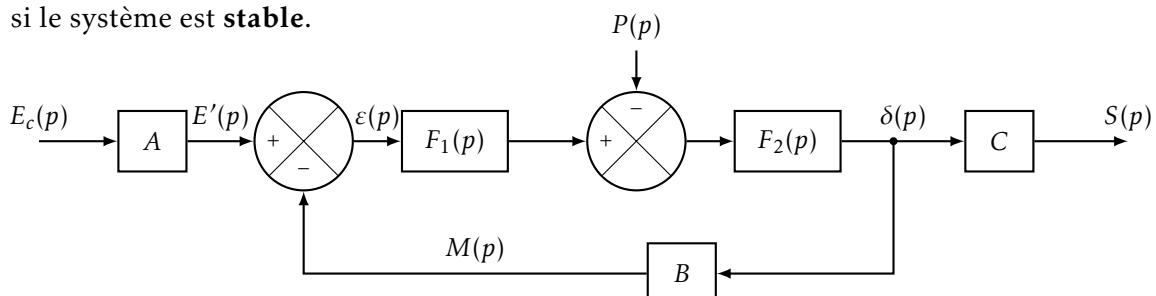
Pour mieux comprendre le rôle des pôles de la FTBF, on représente ci-dessous l'allure de la réponse à l'impulsion de Dirac d'un système selon la position des pôles de sa FTBF.



2.2 Précision

Il est possible d'évaluer la précision d'un système uniquement :

- si l'entrée et la sortie du système sont des grandeurs comparables (**homogènes**);
- si le système est **stable**.



La précision est caractérisée par l'**erreur** $e_r(t)$, différence entre la consigne $e_c(t)$ (grandeur de commande) et la sortie $s(t)$ (grandeur commandée) :

L'écart $\varepsilon(t)$ est différent de l'erreur dans le cas général à cause de la fonction du capteur sur le retour !

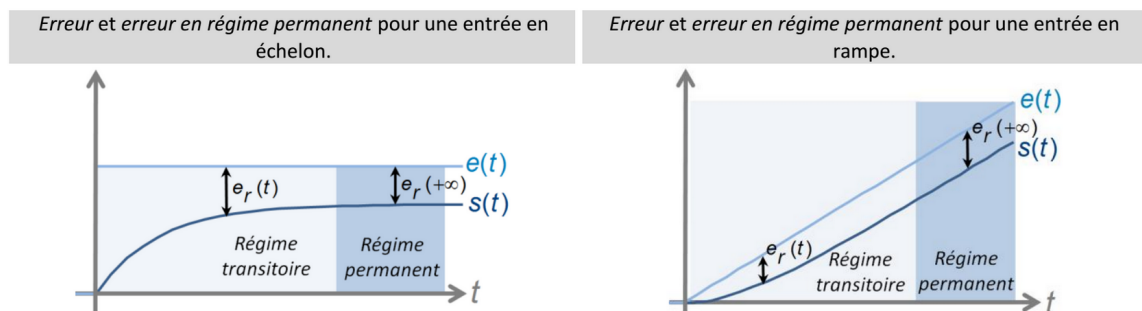
L'**erreur en régime permanent** e_{rs} est la valeur de l'erreur quand le régime permanent est établi.

Si l'**erreur en régime permanent** est **nulle**, on dit que le système est **précis**.

Sinon, il faut comparer sa valeur avec une valeur maximale imposée par le **cahier des charges** du système afin de conclure si elle est acceptable.

Le vocabulaire de l'erreur en régime permanent se définit vis-à-vis du type d'entrée considérée. On distingue notamment pour une entrée :

- **Échelon** : **erreur statique**, ou écart statique si le retour est unitaire (différence entre erreur et écart énoncée plus haut);
- **Rampe** : erreur de poursuite, erreur de trainage ou erreur en vitesse.



Remarque : Certains documents ne font pas la différence entre écart et erreur. Aussi, il est possible de rencontrer par exemple "erreur statique pour une entrée en rampe", ce qui ne respecte pas le vocabulaire ci-dessus (il faudrait écrire *erreur en régime permanent pour une entrée en rampe*) mais **on comprend ce qui est demandé**.

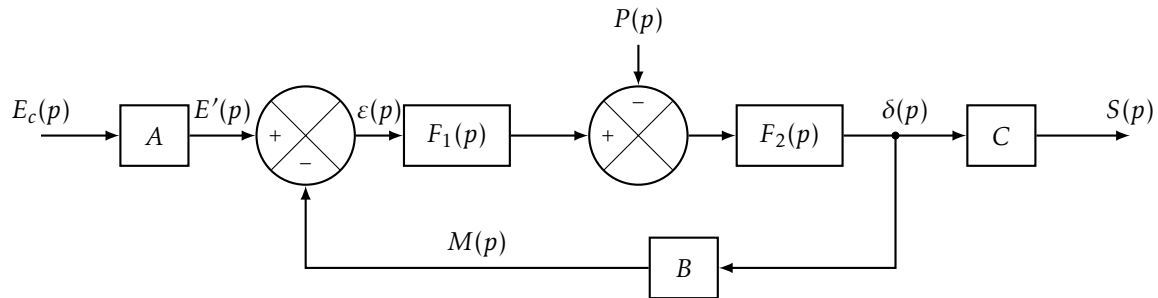
Le **vocabulaire** adéquat est vraiment **indispensable** quand le **type d'entrée n'est pas précisé**. S'il est demandé *calculer l'erreur statique*, il faut comprendre *calculer l'erreur en régime permanent pour une entrée en échelon*.

Pour calculer l'**erreur en régime permanent**, on utilise le **théorème de la valeur finale** :

Ainsi il est possible de **déterminer** directement l'**erreur en régime permanent** en connaissant la FTBF du système.

2.3 Sensibilité aux perturbations

On considère le schéma bloc assez classique et complet suivant :



Pour déterminer si un système est sensible aux perturbations, on détermine la FTBF du système par rapport à la perturbation $FTBF_p(p) = \frac{S(p)}{P(p)}$. Pour cela, **on suppose que la consigne est nulle.**

Question 4 : Lorsque la consigne est nulle, que vaut $\varepsilon(p)$ en fonction de $M(p)$?

Question 5 : Pour déterminer $FTBF_p(p) = \frac{S(p)}{P(p)}$, réorganiser le schéma-bloc de sorte à mettre $P(p)$ en entrée à gauche et à supprimer $E_c(p)$. Il faut faire apparaître clairement la chaîne directe et la chaîne de retour.

Attention : pour utiliser la formule de Black, il faut tenir compte des signes dans le comparateur !

On considère $-P(p)$ en entrée pour transformer le signe « - » en signe « + » dans le comparateur. La formule de Black donne alors $H_p(p) = \frac{S(p)}{-P(p)}$. Or $FTBF_p(p) = \frac{S(p)}{P(p)} = -H_p(p)$. D'où :

On calcule ensuite l'erreur en régime permanent :

Remarques :

- **Attention :** $e_c(t)$ désigne ici la consigne. Pour étudier la perturbation, on pose $e_c(t) = 0$, la sortie qu'elle provoque constitue alors une erreur $e_r(t) = -s(t)$. Ce qui est logique car **l'erreur en régime permanent liée à la perturbation n'apporte que de l'erreur**, il n'y a pas de différence avec ce qu'on voulait (la consigne) car comme son nom l'indique, on ne voudrait pas de perturbation du tout.
- Si **l'erreur en régime permanent liée à la perturbation est nulle**, le système n'est pas durablement impactée par la perturbation, autrement dit, le système n'est **pas sensible aux perturbations**.

Méthode

Calculer l'erreur par rapport à la perturbation

1. **Supposer la consigne nulle.**
2. **Réorganiser le schéma bloc** de sorte à mettre l'entrée perturbation en haut à gauche, bien faire apparaître la chaîne directe et la chaîne de retour.
3. Attention aux **signes dans les comparateurs**! Très souvent, sur le schéma bloc de base la perturbation arrive dans un signe -, la consigne par un signe + et le retour par un signe -. Dans ce cas :
 - Supprimer le comparateur de la consigne en ramenant le - au niveau du retour, c'est à dire au comparateur de la perturbation.
 - Considérer que l'entrée n'est pas $P(p)$ mais $-P(p)$ pour passer au signe + dans le comparateur de la perturbation au niveau de l'entrée.
4. Déterminer la **fonction de transfert en boucle fermée** par la **formule de Black**.
5. Avec la définition de **l'erreur en régime permanent**, calculer l'impact de la perturbation en se rappelant que la consigne est nulle.

2.3.1 Théorème de superposition

On note $S(p)$ la sortie, $E_c(p)$ la consigne, $P(p)$ la perturbation, $FTBF_p(p) = \frac{S(p)}{P(p)}$ la FTBF lorsque que la consigne est nulle et $FTBF_c(p) = \frac{S(p)}{E_c(p)}$ la FTBF quand la perturbation est nulle. Comme le système est linéaire, il vient :

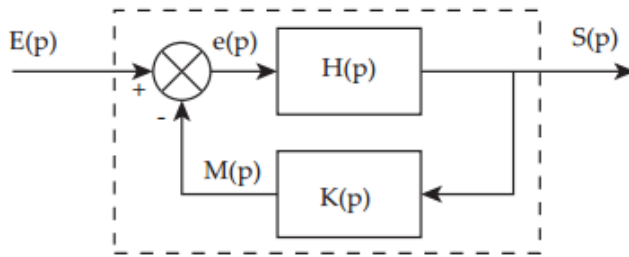
Ce théorème permet de gérer plusieurs entrée pour un système en ne les considérant qu'une à la fois.

2.4 Rapidité et dépassement

Dans le cas général, il n'est pas possible de caractériser la rapidité d'un système ou la présence de dépassements en connaissant uniquement sa fonction de transfert. Néanmoins, nous serons capables de les étudier directement à partir de la FTBF pour certaines fonctions de transfert particulières étudiées dans la prochaine séquence.

3 | Précision par la fonction de transfert en boucle ouverte

3.1 Rappel FTBO sous forme canonique



$$FTBO(p) = \frac{M(p)}{e(p)} = FTCD(p)FTCR(p)$$

De plus, sous forme canonique la FTBO s'écrit :

$$FTBO(p) = \frac{K_{BO}N(p)}{p^{\alpha_{BO}}D(p)}.$$

Avec $N(p)$ et $D(p)$ des polynômes quelconques avec $N(0) = D(0) = 1$. K_{BO} est le gain statique de la FTBO, α_{BO} la classe de la FTBO.

3.2 Tableau erreur-classe-entrée (à connaître)

Nous allons remplir le tableau suivant donnant la précision d'un système en fonction de la classe de sa FTBO et du type d'entrée. Par la suite il sera un **résultat de cours** et pourra être utilisé sans démonstration. Attention cela n'est valable que pour la FTBO.

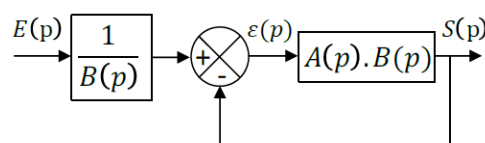
Classe α_{BO}	Erreur statique e_s Pour $e(t) = E_0 u(t)$	Erreur de traînage e_t Pour $e(t) = Vtu(t)$	Erreur en accélération e_a Pour $e(t) = at^2 u(t)$
0			
1			
2			
3			

3.3 Démonstrations

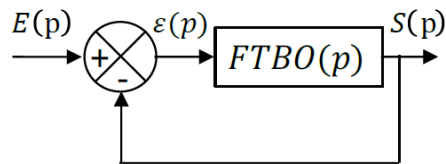
On a vu que :

$$e_{rs} = \lim_{p \rightarrow 0} p E_c(p) (1 - FTBF(p)).$$

On peut montrer que tout système peut se mettre sous forme d'un schéma-bloc à retour unitaire :



De plus, on peut faire entrer le bloc $\frac{1}{B(p)}$ et obtenir ce type de schéma-bloc :



L'erreur devient alors :

3.3.1 Erreur pour une entrée en échelon (première colonne)

Pour une entrée en échelon, la transformée de Laplace est :

$$E_c(p) = \mathcal{L}(E_0 u(t)) = \frac{E_0}{p}.$$

Ainsi :

3.3.2 Erreur pour une entrée en rampe (deuxième colonne)

Pour une entrée en rampe, la transformée de Laplace est :

$$E(p) = \mathcal{L}(V t u(t)) = \frac{V}{p^2}.$$

Ainsi :

3.3.3 Erreur pour une entrée en accélération (troisième colonne)

Pour une entrée en accélération, la transformée de Laplace est :

$$E(p) = \mathcal{L}(at^2 u(t)) = \frac{2a}{p^3}.$$

On montre de la même manière que :

$$e_{rs} = \begin{cases} \infty & \text{si } \alpha \leq 1, \\ \frac{2a}{K_{BO}} & \text{si } \alpha = 2, \\ 0 & \text{si } \alpha \geq 3. \end{cases}$$

3.4 Bilan

On remarque que la **diagonale** présente des **valeurs définies connues** pour les erreurs, la **partie basse des erreurs nulles** et la **partie haute des erreurs infinies** (système non stable).

4 | Gain d'adaptation

Reprenons le schéma bloc suivant :

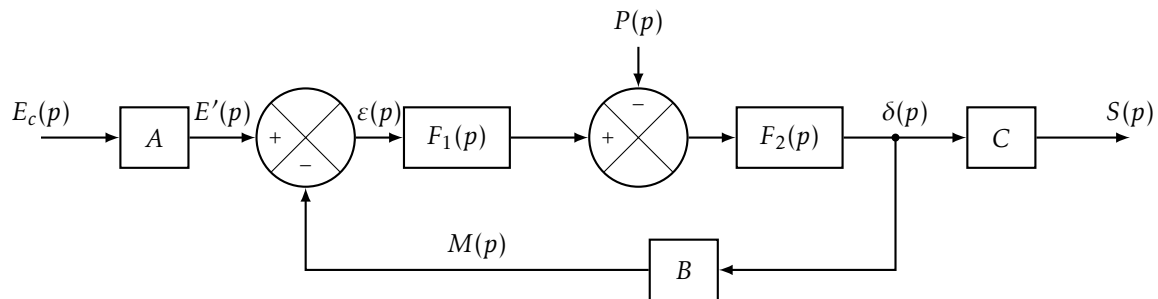


FIGURE 1 – Schéma bloc classique complet

Le gain d'adaptation correspond à la fonction de transfert entre la consigne et le comparateur, donc ici le gain d'adaptation est A .

Ce gain est nécessaire. En effet, pour qu'un système soit asservi, il faut qu'il y ait une mesure. Or, **les instruments de mesure ont tous un gain**, une fonction de transfert, qui réalise au moins un changement de dimension.

Exemple

Prenons le cas d'un asservissement en vitesse d'un moteur à courant continu. La consigne $E_c(p)$ est une vitesse de rotation, de même pour $S(p)$. Il y a potentiellement un réducteur modélisé par la fonction de transfert C . Le capteur mesure la vitesse de rotation côté moteur (donc avant le réducteur), sa fonction de transfert est B .

Comme énoncé dans la première séquence, **les capteurs mesurent des grandeurs physiques par l'intermédiaire d'une mesure de tension**, la grandeur renvoyée est donc une tension ; $M(p)$ est homogène à une tension.

Ainsi pour que les équations soient homogènes, $E'(p)$ doit être homogène à une tension. Ce qui nécessite la présence du gain d'adaptation A , car $E_c(p)$ est une vitesse de rotation.

Aussi, la **caractéristique des capteurs** n'est pas forcément unitaire, c'est à dire, par exemple, la mesure de 1 rad.s^{-1} ne donne pas 1 V . On comprend assez aisément que **si la mesure de la sortie est multipliée par un gain, il faut que la consigne le soit aussi** sinon la comparaison de leurs images n'a plus de sens.

Bilan : Le gain d'adaptation permet d'adapter la consigne à l'architecture de l'asservissement en faisant une conversion de dimension avec un gain prenant en compte le gain capteur et les fonctions de transfert entre le retour et la sortie.

4.1 Déterminer le gain d'adaptation

Une question classique est *Déterminer A pour que le système soit correctement asservi.*, il faut comprendre *Déterminer A pour qu'un écart nul corresponde à une erreur nulle.*, soit par équation :

Remarques :

- On dit qu'un système est correctement asservi quand l'erreur est nulle et l'écart est nul.

Autrement dit, lorsque que la sortie suit bien la consigne, il ne faut pas qu'il y ait un écart non nul, sinon la sortie va changer et l'erreur ne sera plus nulle.

- On veut toujours qu'un système soit correctement asservi, même quand ce n'est pas précisé.

Question 6 : Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $E_c(p)$ et $S(p)$, sans passer par la chaîne directe !

Question 7 : Le système est correctement asservi, en déduire l'expression du gain d'adaptation A .



Calculer le gain d'adaptation

1. Exprimer la condition par les équations :

$$\varepsilon(p) = 0 \quad \text{et} \quad E_c(p) - S(p) = 0$$

2. Exprimer $\varepsilon(p)$ en fonction de $E_c(p)$ et $S(p)$ en faisant apparaître le gain d'adaptation. Pour cela, ne pas passer par la chaîne directe !
3. Se rappeler que $\varepsilon(p) = 0$ et $E_c(p) = S(p)$ et en déduire l'expression du gain d'adaptation.

4.2 Gain d'adaptation et FTBO

Toujours avec le schéma bloc de la Figure 1, on considère la perturbation nulle $P(p) = 0$. On sait maintenant que $A = \frac{B}{C}$.

Question 8 : Déterminer la fonction de transfert en boucle ouverte $FTBO(p) = \frac{M(p)}{\varepsilon(p)}$.

Question 9 : Manipuler le schéma bloc de sorte à ce que le retour soit unitaire. Pour cela, rentrer A et C dans la boucle.

Question 10 : Déterminer la FTBO de ce schéma bloc.

Bilan : On s'aperçoit que les deux méthodes donnent le même résultat tant que le système est correctement asservi, ce qui sera tout le temps le cas ! Le choix de la méthode est donc libre.